

Ejercicio 1.

Prueba que la ecuación $x \cdot \ln x = 2$ tiene alguna solución real y encuéntrala con una cifra decimal exacta.

Definimos la función $f(x) = x \cdot \ln x - 2$, $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[2, 3]$ por ser suma y producto de funciones continuas en \mathbb{R}^+ , y se cumple que $f(2) < 0$ y $f(3) > 0$, (estamos en las condiciones del teorema de Bolzano) $\Rightarrow \exists x_0 \in (2, 3)$ tal que $f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ es solución de la ecuación $x \cdot \ln x - 2 = 0$.

Aproximemos dicha solución a una cifra decimal exacta:

$$\begin{cases} f(2) < 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (2, 3) / \begin{cases} f(2) < 0 \\ f(2.5) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (2, 2.5) / \begin{cases} f(2.3) < 0 \\ f(2.5) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (2.3, 2.5) / \begin{cases} f(2.3) < 0 \\ f(2.4) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (2.3, 2.4). \text{ Entonces } x_0 = 2.3.$$

Ejercicio 2.

Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones:

$$1) f(x) = (x + \sqrt{x})^5 \Rightarrow f'(x) = 5(x + \sqrt{x})^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow f'(x) = 5(x + \sqrt{x})^4 \cdot \left(\frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$2) f(x) = \ln(\operatorname{sen} x) \cdot \sec x$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \text{derivamos como cociente, } (\sec x)' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \cdot \sec x + \ln(\operatorname{sen} x) \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x \cdot \ln(\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$3) f(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = -2 \left(\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$4) f(x) = x^{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x^{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow \ln y = \operatorname{sen}^2 x \cdot \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \ln x + (\operatorname{sen}^2 x) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \left(\operatorname{sen} 2x \cdot \ln x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\right) \cdot x^{\operatorname{sen}^2 x}$$

Ejercicio 3.

Clasifica las discontinuidades de las funciones:

$$a) f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 + x}{x^2 - x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{posibles discontinuidades en } x = -1, x = 0 \text{ y } x = 1.$$

Analizamos el tipo de discontinuidad en cada punto.

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) \text{ no existe, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} \rightarrow \frac{-2}{0^-} \rightarrow +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} \rightarrow \frac{-2}{0^+} \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{en } x = -1 \text{ hay una discontinuidad de tipo infinito.}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) \text{ no existe, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} \rightarrow \frac{2}{0^-} \rightarrow -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} \rightarrow \frac{2}{0^+} \rightarrow +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{en } x = 1 \text{ hay una discontinuidad de tipo infinito.}$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) \text{ no existe, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x+1} \rightarrow \frac{-1}{1} \rightarrow -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x-1} \rightarrow \frac{1}{-1} \rightarrow -1 \end{cases} \Rightarrow \text{en } x = 0 \text{ hay una discontinuidad evitable.}$$

$$b) g(x) = 7 - |2x - 3|$$

$$g(x) = \begin{cases} 7 - (-2x + 3) & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ 7 - (2x - 3) & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ 10 - 2x & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}, \text{ cada rama es continua en el intervalo que est\u00e1 definida.}$$

$$\text{Veamos si } g(x) \text{ es continua en } x = \frac{3}{2}. \quad g\left(\frac{3}{2}\right) = 10 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} (2x + 4) \rightarrow 7 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} (10 - 2x) \rightarrow 7 \end{cases} \Rightarrow \text{en } x = \frac{3}{2} \text{ la funci\u00f3n es continua } \Rightarrow g(x) \text{ no tiene discontinuidades.}$$

Ejercicio 4.

Supongamos que f es continua para todo número real x , excepto para $x = 6$. Si $g(x) = \frac{3x}{x-2}$ ¿para qué valores de x puede asegurarse la continuidad de la función $f \circ g$?

Para que la función $(f \circ g)(x)$ sea continua en un punto x_0 , g debe ser continua en x_0 y f continua en el punto $g(x_0)$.

Con estas premisas, como $g(x) = \frac{3x}{x-2}$, g es continua en todos los reales salvo en $x = 2 \Rightarrow f \circ g$ tampoco es continua en $x = 2$.

Como f debe ser continua en el punto $g(x_0)$, $g(x_0)$ tiene que ser distinto de 6

$\frac{3x}{x-2} = 6 \Rightarrow 3x = 6x - 12 \Rightarrow x = 4$. Entonces la función $f \circ g$ no es continua en $x = 4$.

Conclusión: $(f \circ g)(x)$ no es continua en $x = 2$ puesto que en ese punto no es continua la función g , $(f \circ g)(2) = f(g(2))$

$(f \circ g)(x)$ no es continua en $x = 4$ puesto que $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(6)$ y f no es continua en $x = 6$.

$f \circ g$ es continua en $\mathbb{R} - \{2, 4\}$

Ejercicio 5.

Calcula:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right)^{1-5n}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}(x - \sqrt{x^2 + x + 1})}$$

a) Indeterminación del tipo 1^∞

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right)^{1-5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2+n}{1+n} - 1 \right)^{1-5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+n} \right)^{1-5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+n} \right)^{(1+n) \frac{1-5n}{1+n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-5n}{1+n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 5}{\frac{1}{n} + 1}} = e^{-5}$$

b) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty \cdot (\infty - \infty)}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}(x - \sqrt{x^2 + x + 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3} - \sqrt{x^3 + x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3 + x^2 + x})}{(\sqrt{x^3} - \sqrt{x^3 + x^2 + x})(\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3 + x^2 + x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + \sqrt{x^4 + x^3} + \sqrt{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x}}{x^3 - (x^3 + x^2 + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sqrt{x^4 + x^3 + x^2} + \sqrt{x^4 + x^3} + \sqrt{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x}}{-x^2 - x} =$$

$$\left(\text{dividimos todo por } x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}}{-1 - \frac{1}{x}} = \frac{1+1+1+1}{-1} = -4$$