Problema 1 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - bx + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^2 + 2bx - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} (3ax^2 - bx + 2) = 3a - b + 2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} (ax^2 + 2bx - 1) = a + 2b - 1 \end{array} \right. \Longrightarrow 2a - 3b = -3$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2ax + 2b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 6a - b \\ f'(1^+) = 2a + 2b \end{array} \right. \Longrightarrow 4a - 3b = 0$$

3. $$\left\{ \begin{array}{l} 2a - 3b = -3 \\ 4a - 3b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3/2 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 9/2x^2 - 2x + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 3/2x^2 + 4x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 9x - 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3x + 4 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El

Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0,2)$ que cumple $f'(c) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{11}{2}$.

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = 9c - 2 = 11/2 \Longrightarrow c = 5/6 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = 3c + 4 = 11/2 \Longrightarrow c = 1/2 \text{ no vale}$$

El punto $c \in (0,2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 7/12$.

Problema 2 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto $(0,2)$, tenga un extremo relativo en el punto $(1,5)$ y un punto de inflexión en $x = 2$. Decidir si el extremo es un máximo o un mínimo.

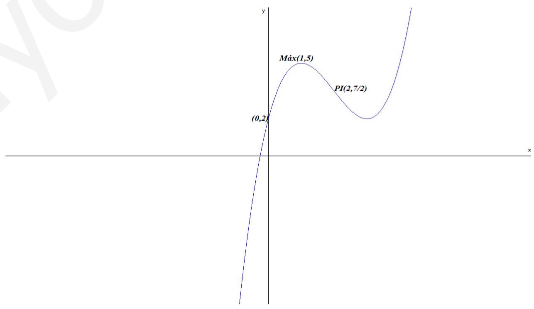
Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow d = 2 \\ f(1) = 3 \Longrightarrow a + b + c + d = 5 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f''(2) = 0 \Longrightarrow 12a + 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3/4 \\ b = -9/2 \\ c = 27/4 \\ d = 2 \end{array}\right.$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{4}x + 2 \Longrightarrow f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 9x + \frac{27}{4} \Longrightarrow f''(x) = \frac{9}{2}x - 9$$

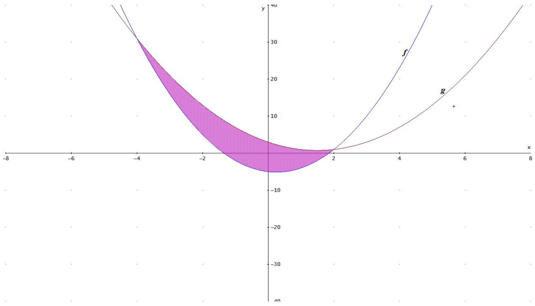
$f''(1) = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2} < 0 \Longrightarrow$ el extremo en el punto $(1,5)$ es un máximo.



Problema 3 Se pide:

1. Hallar el área encerrada por las funciones $f(x) = 2x^2 - x - 5$ y $g(x) = x^2 - 3x + 3$.

2. Calcular el volumen de revolución formado por la gráfica de la función g al girar sobre el eje OX en el intervalo $[0,1]$.



Solución:

1. La área sería:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x^2 - x - 5 = x^2 - 3x + 3 \Longrightarrow x = -4, \;\; x = 2$$

$$H(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^2 + 2x - 8)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 8x$$

$$S_1 = \int_{-4}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = H(2) - H(-4) = -36$$

$$S = |S_1| = 36\,u^2$$

2.

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - 3x + 3)^2\,dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 9)\,dx =$$

$$\left.\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 5x^3 - 9x^2 + 9x\right]_0^1 = \frac{37\pi}{10}\,u^3$$

Problema 4 Dada la función $f(x) = |x^2 + 2x - 8|$ se pide:

1. Representación gráfica de forma aproximada y su forma como una función definida por ramas

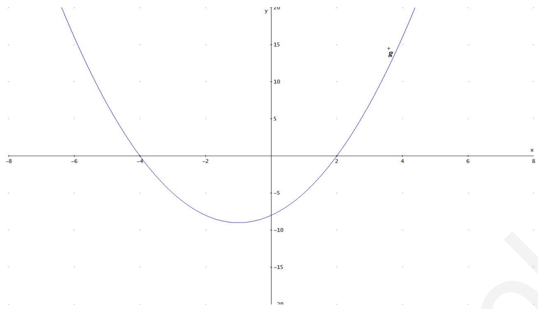
2. Estudiar su continuidad y derivabilidad a la vista del estudio anterior.

Solución:

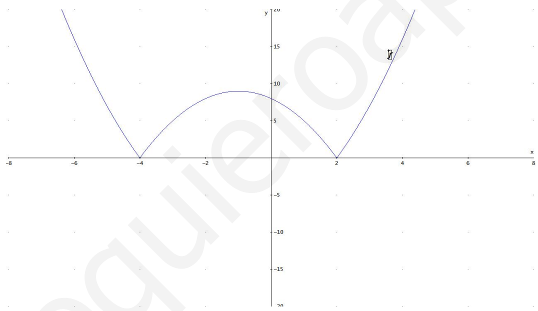
1. LLamamos $g(x) = x^2 + 2x - 8$ y la representamos gráficamente. La función $f(x) = |x^2 + 2x - 8|$ no puede tener recorrido por debajo del eje de abcisas. Esta función sería:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 8 & \text{si} \quad x < -4 \\ -x^2 - 2x + 8 & \text{si} \quad -4 \le x < 2 \\ x^2 + 2x - 8 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

2. Claramente y a la vista de la gráfica la función es continua en todo R pero no sería derivable en los puntos $x = -4$ y $x = 2$ donde presenta picos. En esos picos podríamos trazar infinitas tangentes a la gráfica de f.
La gráfica de la función g:



La gráfica de la función f:



Problema 5 Estudiar la derivabilidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} -2e^x - x & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

y dibuja una representación gráfica aproximada.
Solución:

Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0}(-2e^x - x) = -2 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x+2}{x-1} = -2 \\ \\ f(0) = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es siempre continua. Luego la función es continua en R.

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} -2e^x - 1 & \text{si} & x < 0 \\ \\ \dfrac{-3}{(x-1)^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

$f'(0^-) = -3 \neq f'(0^+) = -3 \Longrightarrow f$ es derivable en $x = 0$.

En conclusión f es continua y derivable en $R - \{1\}$ (Hay una asíntota en la rama $x \geq 0$ en $x = 1$)