Problema 1 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{-2x+1}{(x-3)^2}$, calcule:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 0$.
10. Área encerrada entre la función, el eje de abcisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{3\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -2x+1 = 0 \Longrightarrow x = 1/2 \Longrightarrow (1/2, 0)$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 1/9 \Longrightarrow (0, 1/9)$.
3.

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
signo	$+$	$-$

4. $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ la función no tiene simetrías.
5. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 3$

$$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{-2x+1}{(x-3)^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{-2x+1}{(x-3)^2} = \left[\frac{-5}{0^+}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{-2x+1}{(x-3)^2} = \left[\frac{-5}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{-2x+1}{(x-3)^2} = 0$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

6.

$$f'(x) = \frac{2(x+2)}{(x-3)^3} = 0 \Longrightarrow x = -2$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-2,3)$.
La función tiene un máximo en el punto $(-2,1/5)$.

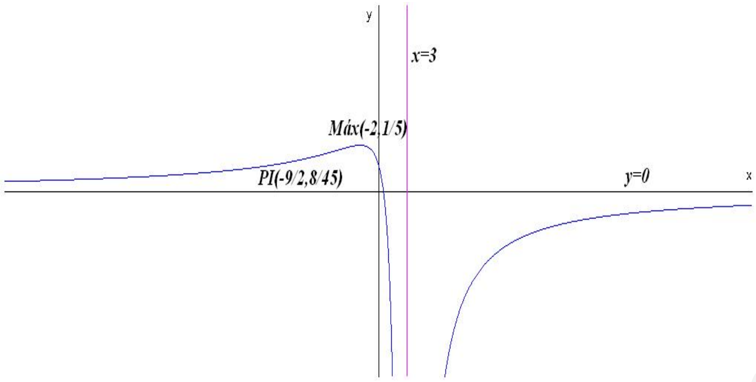
7.

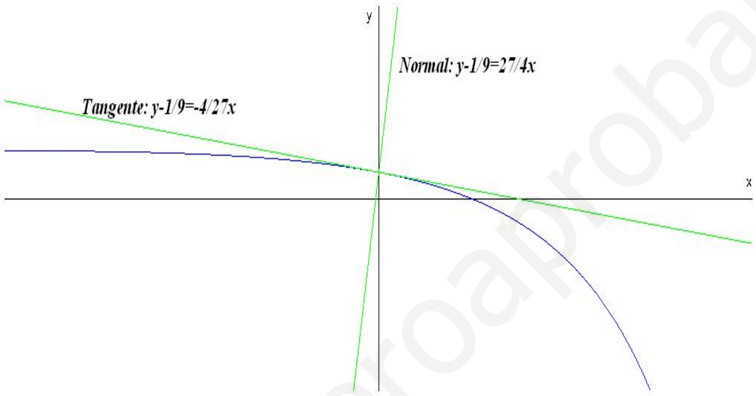
$$f''(x) = -\frac{2(2x+9)}{(x-3)^4} = 0 \Longrightarrow x = -9/2$$

	$(-\infty,-9/2)$	$(-9/2,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava	convexa

Convexa: $(-9/2,3)\cup((3,+\infty)$
Cóncava: $(-\infty,-9/2)$
Un punto de Inflexión en $(-9/2,8/45)$

8. Representación:





9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 0$:
   Como $m = f'(0) = -4/27$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y - \frac{1}{9} = -\frac{4}{27}x$$

$$\text{Recta Normal}: \ y - \frac{1}{9} = \frac{27}{4}x$$

   Como $f(0) = 1/9$ las rectas pasan por el punto $(0, 1/9)$.

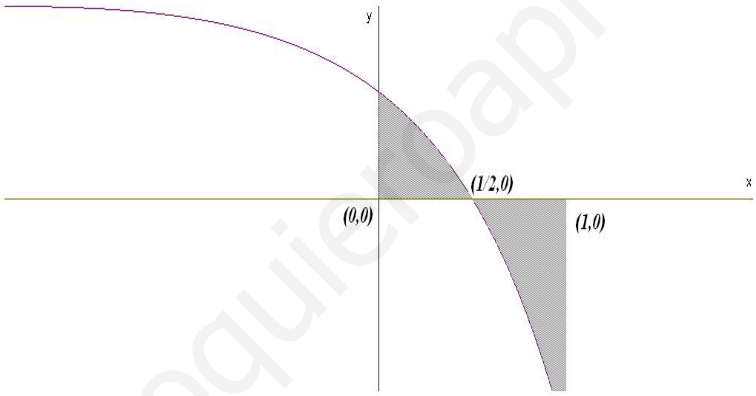
10.
$$F(x) = \int \frac{-2x+1}{(x-3)^2}\, dx = \frac{5}{x-3} - 2\ln|x-3| + C$$

   Los límites de integración son $[0, 1/2]$ y $[1/2, 1]$.

$$S_1 = F(1/2) - F(0) = -\frac{1}{3} - 2\ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$S_2 = F(1) - F(1/2) = -\frac{1}{2} + 2\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{6} + 2\ln\left(\frac{25}{24}\right) \ u^2$$


y
x
(0,0)
(1/2,0)
(1,0)