

Problema 1 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

1. Determina si la función es derivable en $x = 0$
2. Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y dibuja su gráfica.
3. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas ($y = 0$) y las rectas verticales $x = -3$ y $x = 2$.

(Cantabria (junio 2010))

Solución:

1. Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$$

$$f(0) = 0$$

Luego f es continua en $x = 0$ Derivabilidad en $x = 0$:

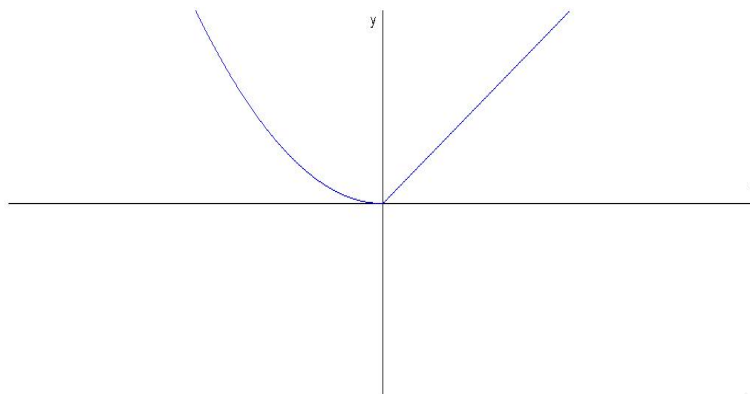
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = 0$ y $f'(0^+) = 2 \implies f$ no es derivable en $x = 0$.

2. Si $x < 0 \implies f'(x) = 2x < 0 \implies$ la función f es en este caso decreciente.

Si $x \geq 0 \implies f'(x) = 2 > 0 \implies$ la función f es en este caso creciente.

Luego la función es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.



3.

$$S_1 = \int_{-3}^0 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-3}^0 = 9$$

$$S_2 = \int_0^2 2x dx = \left. x^2 \right|_0^2 = 4$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 13 u^2$$

Problema 2 Calcular b y c sabiendo que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es derivable en el punto $x = 0$ (Castilla y León (junio 2010))

Solución:

- Por la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + bx + c) = c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

Luego $c = 1$.

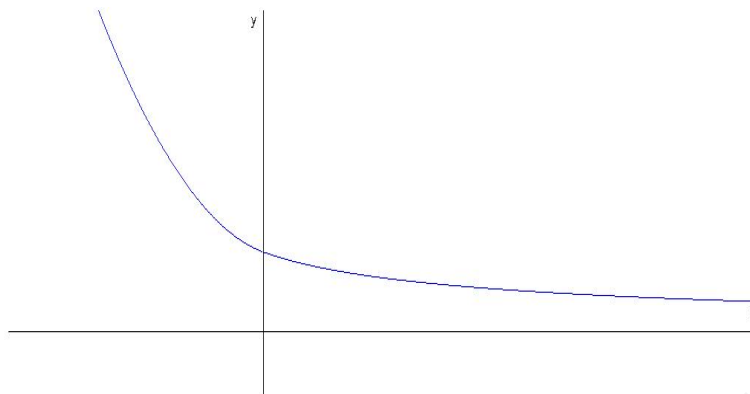
- Por la derivabilidad en $x = 0$:

$$\text{Si } x \leq 0 \implies f'(x) = 2x + b \implies f'(0^-) = b$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(h+1)}{h} - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h+1) - h}{h^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h+1} - 1}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{2h(h+1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Luego } b = -\frac{1}{2}.$$



Problema 3 Calcular la siguiente integral

$$\int_{-1}^2 |x^2 - 3x + 2| dx$$

(Castilla y León (junio 2010))

Solución:

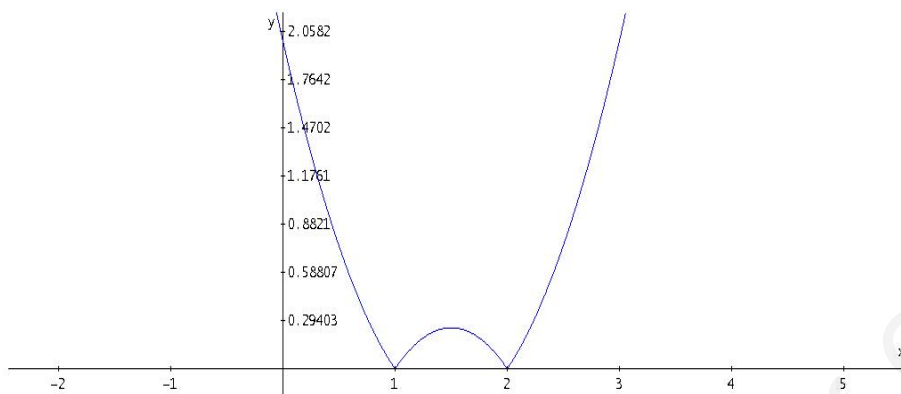
Hacemos $g(x) = x^2 - 3x + 2 \implies g'(x) = 2x - 3 = 0 \implies x = \frac{3}{2}$:

x	y
0	2
2	0
1	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$

$g''(x) = 2 \implies g''\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \implies$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -(x^2 - 3x + 2) & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 |x^2 - 3x + 2| dx &= \int_{-1}^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{29}{6} \end{aligned}$$



Problema 4 Dada la la función

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

se pide:

1. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, y las asíntotas.

2. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}, \text{ el eje } OX \text{ y las rectas } x = 2, x = 4.$$

(Castilla y León (junio 2010))

Solución:

1. ■ Asíntotas:

• Verticales: En $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \left[\frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \left[\frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

• Horizontales: En $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

• Oblicuas: No hay por haber horizontales.

■ Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$$

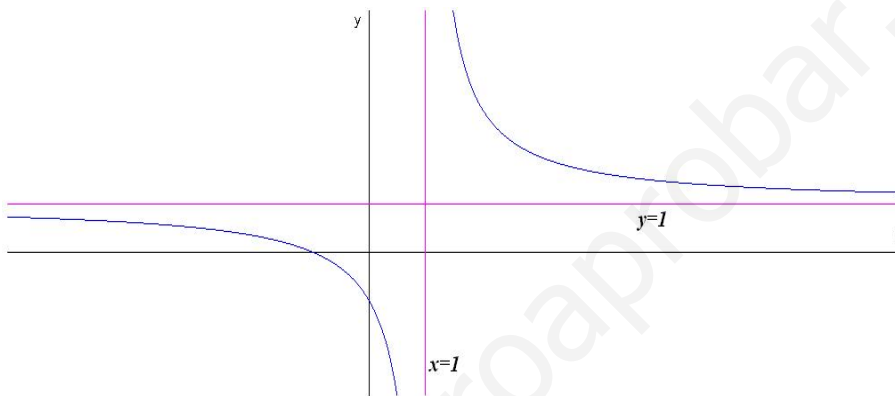
La función f es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ y, por tanto, no tiene extremos.

- Intervalos de concavidad y convexidad:

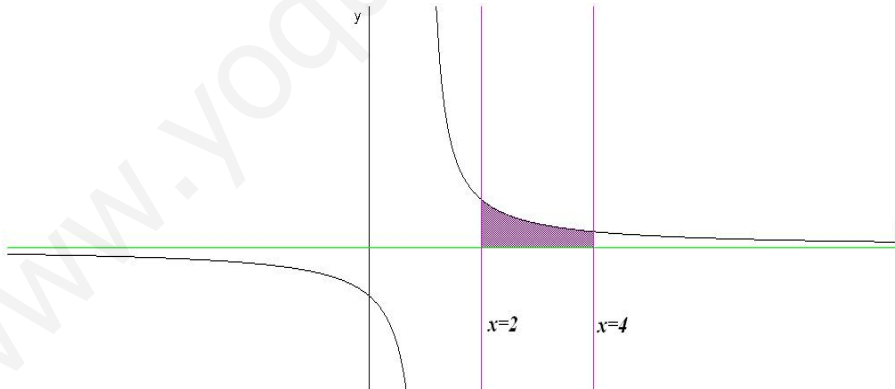
$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3} \neq 0$$

La función f no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa \cap	cóncava \cup



2. Calcular el siguiente área:



$$g(x) = \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)}$$

$$x+1 = A(x-1) + Bx$$

Si hacemos $x = 0 \implies A = -1$ y si hacemos $x = 1 \implies B = 2$, luego:

$$g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}$$

Si hacemos $g(x) = 0 \implies x = -1$ que esta fuera del recinto donde queremos calcular el área. Luego

$$S = \int_2^4 \frac{x+1}{x(x-1)} dx = \int_2^4 \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} \right) dx =$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| \Big|_2^4 = \ln \frac{9}{2} = 4,5 u^2$$

Problema 5 Calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x \cos x - 1}{\sin x - x + 1 - \cos x}$$

(Extremadura (junio 2010))

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x \cos x - 1}{\sin x - x + 1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + x \sin x}{\cos x - 1 + \sin x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x + \sin x + x \cos x}{-\sin x + \cos x} = 1$$

Problema 6 Calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^2}$$

(Andalucía (junio 2010))

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x e^{\sin x}}{2x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x e^{\sin x} - \cos^2 x e^{\sin x}}{2} = 0$$

Problema 7 Calcúlese utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ que cumpla $F(0) = 0$ (Extremadura (junio 2010))

Solución:

Hacemos $u = x^2 \implies du = 2x dx$ y $dv = e^{-x} dx \implies v = -e^{-x}$

$$F(x) = \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx$$

Hacemos $u = x \implies du = dx$ y $dv = e^{-x} dx \implies v = -e^{-x}$

$$F(x) = \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \left(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right)$$

$$F(x) = \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) + C = -2e^{-x}(x^2 - x - 1) + C$$

$$F(0) = -2 + C = 0 \implies C = 2$$

$$F(x) = -2e^{-x}(x^2 - x - 1) + 2$$

Problema 8 Calcular los números reales a , b y c de la función $f(x) = ax^2 - 2bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 0)$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - 2bx + 3c, \quad f'(x) = 2ax - 2b$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \implies a - 2b + c = 2 \\ f(3) = 0 \implies 9a - 6b + c = 0 \\ f'(3) = 0 \implies 6a - 2b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3/2 \\ c = 9/2 \end{cases}$$