GEOMETRÍA EN EL ESPACIO: FÓRMULAS Y CONCEPTOS IMPORTANTES

VECTORES

Componentes de un vector en el espacio

Si las coordenadas de A y B son: $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ Las **coordenadas o componentes del vector** $\overrightarrow{AB}$ coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Módulo de un vector

El **módulo** de un **vector** es la **longitud** del **segmento** orientado que lo define.

El **módulo** de un **vector** es un **número** siempre **positivo** y solamente el **vector nulo** tiene módulo **cero**.

Cálculo del módulo conociendo sus componentes

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Cálculo del módulo conociendo las coordenadas de los puntos

$$A(x_1, y_1, z_1) \qquad B(x_2, y_2, z_2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Dos vectores son paralelos si y solo si sus componentes son proporcionales

---

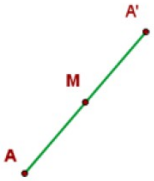
PUNTO MEDIO Y PUNTO SIMÉTRICO

Coordenadas del punto medio de un segmento

Sean A (x_1, y_1, z_1) y B (x_2, y_2, z_2) los extremos de un segmento, el **punto medio** del segmento viene dado por:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Simétrico de un punto respecto a otro



Si **A'** es el **simétrico** de **A** respecto de **M**, entonces **M** es el **punto medio** del **segmento AA'**. Por lo que se verificará igualdad:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$$

de donde se obtiene que:

$$A'(2m_1 - a_1, 2m_2 - a_2, 2m_3 - a_3)$$

ECUACIONES DE LA RECTA

Necesitamos un punto y un vector director, o bien dos puntos de la recta (usaremos como vector director el que pasa por esos puntos) para obtener todas sus ecuaciones.

Sea $P(x_{0,} y_{0,} z_0)$ un punto de la recta y $\vec{u}(u_{1,} u_{2,} u_3)$ un vector director.

ECUACIÓN VECTORIAL:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot u_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot u_2 \\ z = z_0 + \lambda \cdot u_3 \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA:

Despejando e igualando λ en las **ecuaciones paramétricas** se tiene:

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

ECUACIÓN IMPLÍCITA:

Una **recta** puede venir determinada por la **intersección de los planos**.

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Si en las **ecuaciones continuas de la recta** quitamos denominadores y pasamos todo al primer miembro, obtenemos las **ecuaciones implícitas**.

ECUACIONES DEL PLANO

Necesitamos un punto y dos vectores no paralelos del plano, o bien tres puntos no alineados (uniendo los puntos obtendremos los dos vectores que necesitamos)

Sea $P(x_{0,} y_{0,} z_0)$ un punto del plano y $\vec{u}(u_{1,} u_{2,} u_3)$ y $\vec{v}(v_{1,} v_{2,} v_3)$ vectores del plano

ECUACIÓN VECTORIAL:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda (u_1, u_2, u_3) + \mu (v_1, v_2, v_3)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 \lambda + v_1 \mu \\ y = y_0 + u_2 \lambda + v_2 \mu \\ z = z_0 + u_3 \lambda + v_3 \mu \end{cases}$$

ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO

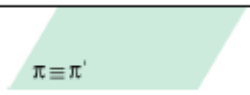
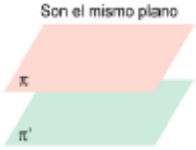
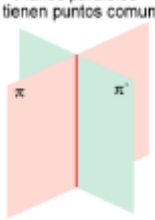
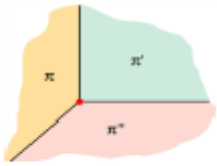
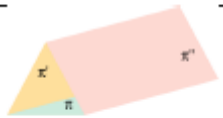
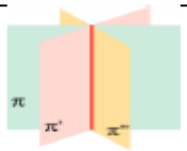
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

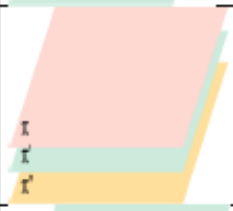
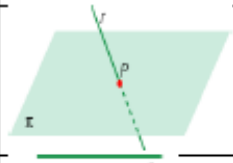
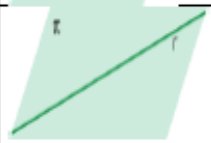
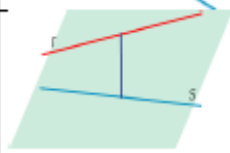
Desarrollando el determinante nos queda una expresión del tipo:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde (A,B,C) es el vector normal (perpendicular) al plano

Resumen de posiciones relativas en el espacio

DOS PLANOS π: Ax+By+CZ+D=0 π':A'x+B'y+C'z+D'=0 $M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$	rangM=rangM*=1	Planos coincidentes	 Planos coincidentes Son el mismo plano
	rangM=1≠ rangM*=2	Planos paralelos	 Planos paralelos No tienen puntos comunes
	rangM=rangM*=2	Planos secantes	 Planos secantes Tienen una recta común
TRES PLANOS π: Ax+By+CZ+D=0 π':A'x+B'y+C'z+D'=0 π'':A''x+B''y+C''z+D''=0 $M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$	rangM=rangM*=3	Planos secantes en un punto formando un triedro	
	rangM=2≠ rangM*=3 (los 3 planos no tienen ningún punto en común)	Planos secantes 2 a 2 formando una superficie prismática.	
		2 planos paralelos y el otro los corta.	
	rangM=2=rang M* (planos que se cortan en una recta)	Planos distintos que se cortan en una recta.	
		2 de los planos son coincidentes y el otro los corta.	

TRES PLANOS π: Ax+By+CZ+D=0 π':A'x+B'y+C'z+D'=0 π'':A''x+B''y+C''z+D''=0 $M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$	rangM =1≠ rang M*=2 (los 3 planos no tienen ningún punto en común)	2 planos coincidentes y el otro paralelo.	
		Planos paralelos y distintos 2 a2	
	rangM=1=rangoM*	Planos coincidentes (3 ecuaciones equivalentes del mismo plano).	
RECTA Y PLANO $\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}: r$ Π : A''x+B''y+C''z+D''=0 $M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$	rangM=rangM*=3	Recta y plano secantes. (P=r∩ π=pto de corte).	
	rangM=2≠ rangM*=3	Recta y plano paralelos	
	rangM=rangM*=2	Recta contenida en el plano	
DOS RECTAS r (A , $\vec{v}$) s (B , $\vec{w}$)	rango ($\vec{v}$, $\vec{w}$)=2 rango($\vec{v}$,$\vec{w}$,$\overrightarrow{AB}$)=2	Rectas secantes (tienen un único punto en común)	
	rango ($\vec{v}$, $\vec{w}$)=2 rango($\vec{v}$,$\vec{w}$,$\overrightarrow{AB}$)=3	Rectas que se cruzan (no tienen nigúnpto en común)	
	rango ($\vec{v}$, $\vec{w}$)=1 rango($\vec{v}$,$\vec{w}$,$\overrightarrow{AB}$)=2	Rectas paralelas	
	rango ($\vec{v}$, $\vec{w}$)=1 rango($\vec{v}$,$\vec{w}$,$\overrightarrow{AB}$)=1	Rectas coincidentes	

PRODUCTO ESCALAR Y PRODUCTO VECTORIAL

El **producto escalar** de **dos vectores** es un **número real** que resulta al **multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman**.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

Expresión analítica del producto escalar

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3$$

Expresión analítica del ángulo de dos vectores

$$\cos\alpha = \frac{u_1 . v_1 + u_2 . v_2 + u_3 . v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Dos vectores no nulos son perpendiculares si y solo si su producto escalar es cero

---

El **producto vectorial** de **dos vectores** es otro **vector** cuya **dirección** es **perpendicular** a los dos vectores y su **sentido** sería igual al avance de un **sacacorchos** al girar de u a v. Su **módulo** es igual a:

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\,sen\,\alpha$$

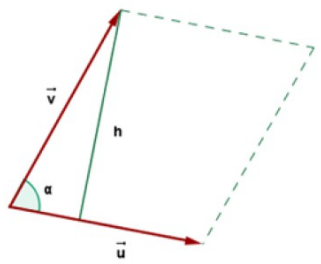
El **producto vectorial** se puede expresar mediante un **determinante**:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Área del paralelogramo

Geométricamente, el **módulo del producto vectorial** de dos vectores coincide con el **área del paralelogramo** que tie lados a esos vectores.

$$A = |\vec{u}|\cdot h = |\vec{u}||\vec{v}|\,\text{sen}\,\alpha = |\vec{u}\times\vec{v}|$$



Propiedades del producto vectorial

1. Anticonmutativa

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

2. Homogénea

$$\lambda\,(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$$

3. Distributiva

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}\ .$$

4. El **producto vectorial** de dos **vectores paralelos** en igual al **vector nulo**.

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$$

5. El **producto vectorial** $\vec{u} \times \vec{v}$ es **perpendicular** a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

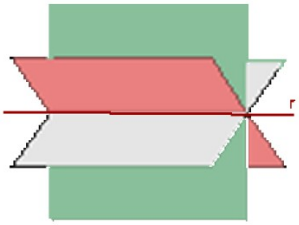
HAZ DE PLANOS

Dos planos son paralelos si los coeficientes x, y, z de sus ecuaciones son proporcionales; pero no lo son sus términos independientes.

Todos los planos paralelos a uno dado admiten una ecuación de la forma:

$$Ax + By + Cz + k = 0 \qquad k \in \mathbb{R}$$

Haz de planos de eje r



Si r viene definida por sus ecuaciones implícitas:

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

la **ecuación del haz de planos de eje r** viene dada por la igualdad:

$$\lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

Si dividimos por λ y hacemos $k = \frac{\mu}{\lambda}$, la ecuación del haz resulta:

$$(Ax + By + Cz + D) + k\,(A'x + B'y + C'z + D') = 0$$

ÁNGULOS EN EL ESPACIO

Ángulo entre dos rectas

El **ángulo que forman dos rectas** es igual al ángulo agudo determinado por los vectores directores de las rectas.

$$\alpha(r,s) = \alpha(\vec{u},\vec{v}) = \arccos \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Dos rectas son **perpendiculares** si **vectores directores** son **ortogonales**.

$$r \perp s \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \qquad u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$$

Ángulo entre dos planos

El **ángulo** formado por **dos planos** es igual al ángulo agudo determinado por los vectores normales de dichos planos.

$$\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1) \qquad \vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\alpha(\pi_1, \pi_2) = \alpha(\vec{n_1}, \vec{n_2}) = \arccos \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Ángulo entre recta y plano

El **ángulo** que forman una **recta** y un **plano** es igual al **complementario** del **ángulo agudo** que forman el **vector direc**
la recta y el **vector normal** del plano.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \qquad \vec{n} = (A, B, C)$$

$$sen\,\alpha = cos\,\beta = cos(\vec{n},\vec{u}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$$

$$\alpha = arc\ sen \frac{|A \cdot u_1 + B \cdot u_2 + C \cdot u_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

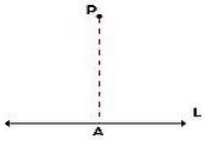
PROYECCIONES ORTOGONALES

Punto sobre Recta

La proyección ortogonal de P sobre la recta r es un punto Q de la recta que cumple que el segmento PQ es perpendicular a r

Para calcular el punto Q:

- Se calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r
- Se calcula el punto intersección de dicho plano con la recta

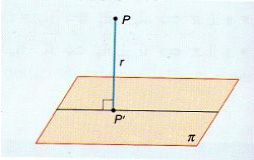


Punto sobre Plano

La proyección ortogonal de un punto P sobre un plano es otro punto Q del plano tal que el segmento PQ es perpendicular al plano.

Para calcular el punto Q:

- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano
- Se calcula el punto intersección de dicha recta con el plano

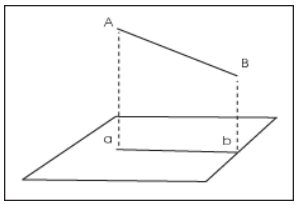


Recta sobre Plano

La proyección ortogonal de una recta r sobre un plano es otra recta s contenida en dicho plano tal que el plano que contiene a r y s es perpendicular al plano dado.

Para calcular la recta s:

- Se escogen dos puntos cualesquiera de la recta y calculamos su proyección ortogonal sobre el plano
- Se halla la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos



PUNTOS SIMÉTRICOS

Punto - Punto (visto en página 1)

Punto - Recta : Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta y hacemos el simétrico del punto original sobre este nuevo punto.

Punto - Plano: Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre el plano y hacemos el simétrico del punto original sobre este nuevo punto.

DISTANCIAS

Distancia entre dos puntos A y B: Es el módulo del vector $\vec{AB}$

Distancia entre punto P y recta r:

Primera forma: Se calcula la Proyección Ortogonal del punto sobre la recta y se halla la distancia entre ambos puntos

Segunda forma: Se escoge un punto A cualquiera de la recta y:

$$d(P,r) = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{u}_r|}$$

Distancia entre punto P y plano π *:*

Primera forma: Se calcula la Proyección Ortogonal del punto sobre el plano y se halla la distancia entre ambos puntos

Segunda forma:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre dos planos paralelos:

Se escoge un punto cualquiera de uno de ellos y se aplica la distancia de un punto a un plano

Distancia entre plano y recta paralela al mismo:

Se escoge un punto cualquiera de la recta y se aplica la distancia del punto al plano

Distancia entre dos rectas:

Si son paralelas, elegimos un punto de una y distancia punto-recta

Si se cruzan, escogemos un punto A y B de cada recta y aplicamos:

$$d(r,s) = h = \frac{V}{A_b} = \frac{[\vec{AB},\vec{u},\vec{v}]}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$ (ver producto mixto en página siguiente)

PRODUCTO MIXTO

El **producto mixto** de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al **producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos**.

El **producto mixto** se representa por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$$

El **producto mixto** de tres vectores es igual al determinante que tiene por filas las coordenadas de dichos vectores respecto a una base ortonormal.

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Volumen del paralelepípedo

El valor absoluto del **producto mixto** representa el **volumen del paralelepípedo** cuyas aristas son tres vectores que coi en un mismo vértice.

Ejemplo

Hallar el **volumen del paralelepípedo** formado por los vectores:

$$\vec{u} = (3, -2, 5) \quad \vec{v} = (2, 2, -1) \quad w = (-4, 3, 2)$$

$$V = \left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 91u^3$$

Volumen de un tetraedro

El **volumen de un tetraedro** es igual a **1/6 del producto mixto**, en valor absoluto.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades del producto mixto

1. El **producto mixto** no varía si se permutan circularmente sus factores, pero cambia de signo si éstos se trasponen.

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \left[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right] = \left[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\right]$$

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = -\left[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\right] = -\left[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\right] = -\left[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\right]$$

2. Si **tres vectores** son **linealmente dependientes**, es decir, si son **coplanarios**, **producto mixto vale 0**.