Problema 1 *(6 puntos).* Sean el plano $\pi : x - 3y + z - 1 = 0$ y la recta $r : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$
se pide:

a) Encontrar una recta s perpendicular a π que pase por el punto $P(3, 0, 1)$.

b) Encontrar una recta t paralela a r que pase por P.

c) Encontrar un plano π' paralelo a π que contenga a P

d) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π. En el caso de que se corten, calcular el punto de corte y el ángulo que forman.

e) Encontrar un plano π'' perpendicular a π que contenga a r.

f) Encontrar la recta h que es proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1, -3, 1), \quad r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases}$$

a)

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, -3, 1) \\ P_s = P(3, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

b)

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ P_t = P(3, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

c)

$$\pi' : x - 3y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 3 - 0 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -4$$

$$\pi' : x - 3y + z - 4 = 0 \Longrightarrow P \in \pi$$

d)

$$r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Longrightarrow (-1 + \lambda) - 3(\lambda) + (1 - \lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

Luego la recta r y el plano π se cortan en el punto $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

El ángulo que forman será $\beta = 90^{\text{o}} - \alpha$ donde α es el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u_\pi} = (1, -3, 1)$ y $\overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1)$:

$$\sin\beta = \frac{\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_\pi}| \cdot |\overrightarrow{u_r}|} = \frac{-3}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{3}} \Longrightarrow \beta = 148^{\text{o}}31'4''$$

e)

$$\pi'' : \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1, -3, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow \pi'' : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x+1 \\ -3 & 1 & y \\ 1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+y+2z-1 = 0$$

f)

$$h : \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Problema 2 *(4 puntos).* Sea el punto $P(1, 0, -2)$. Se pide

a) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto del plano $\pi : 2x - y + 3z - 2 = 0$.

b) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto de la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Solución:

a) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in r$:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2, -1, 3) \\ P_t = P(1, 0, -2) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte P' de t con π:

$$2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) + 3(-2 + 3\lambda) - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{3}{7}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 6/7 = 13/7 \\ y = -3/7 \\ z = -2 + 9/7 = -5/7 \end{cases} \Longrightarrow P'\left(\frac{13}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{5}{7}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':
$$\frac{P''+P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$
$$\left(\frac{26}{7}, -\frac{6}{7}, -\frac{10}{7}\right) - (1,0,-2) = \left(\frac{19}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{4}{7}\right)$$

b) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi \perp r / P \in \pi$:
$$2x + y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 2 + 0 - 2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$
$$\pi : 2x + y + z = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π:
$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ P_r(1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$
$$2(1+2\lambda) + (\lambda) + (1+\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 1 = 0 \\ y = -1/2 \\ z = 1 - 1/2 = 1/2 \end{array} \right. \Longrightarrow P'\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':
$$\frac{P''+P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$
$$(0,-1,1) - (1,0,-2) = (-1,-1,3)$$