Problema 1 *(2 puntos)* Discute si el sistema siguiente es compatible, y en caso afirmativo encuentra las soluciones.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 2y+ & z= & 2\\ x+ & y- & z= & 1\\ 7x- & 3y+ & z= & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & 2y+ & z= & 2\\ x+ & y- & z= & 1\\ 7x- & 3y+ & z= & 5 \end{array}\right. \xrightarrow{(E_2 \longrightarrow E_1)} \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1\\ 3x- & 2y+ & z= & 2\\ 7x- & 3y+ & z= & 5 \end{array}\right. \xrightarrow{\substack{(E_2-3E_1)\\(E_3-7E_1)}}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1\\ & -5y+ & 4z= & -1\\ & -10y+ & 8z= & -2 \end{array}\right. \xrightarrow{(E_3-2E_2)} \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & z= & 1\\ & -5y+ & 4z= & -1\\ & & 0= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

El sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. Vamos a calcularlas:
Despejando y en E_2 y haciendo $z=\lambda$

$$y=\frac{-1-4z}{-5}=\frac{1+4z}{5}=\frac{1+4\lambda}{5}$$

Sustituyendo estos valores en E_1

$$x+\frac{1+4\lambda}{5}-\lambda=1 \Longrightarrow x=\frac{\lambda+1}{5}$$

La solución pedida sería:

$$\left\{\begin{array}{rc} x= & \frac{\lambda+4}{5}\\ y= & \frac{4\lambda+1}{5}\\ z= & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{rr} 3 & 1\\ -3 & 2 \end{array}\right);B=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 4\\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right);C=\left(\begin{array}{rr} 3 & 1\\ -2 & 2\\ 4 & -1 \end{array}\right)$$

Calcula si es posible:

1. $A\cdot B$
2. $B\cdot A$

3. $A \cdot C$

4. $C \cdot A$

5. $B \cdot C$

6. $C \cdot B$

Solución:

1. $A \cdot B$ 2×2 y 2×3, luego la matriz resultante será de dimensión 2×3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 14 \\ -8 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

2. $B \cdot A$ 2×3 y 2×2, luego no se pueden multiplicar.

3. $A \cdot C$ 2×2 y 3×2, luego no se pueden multiplicar.

4. $C \cdot A$ 3×2 y 2×2, luego la matriz resultante será de dimensión 3×2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -12 & 2 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

5. $B \cdot C$ 2×3 y 3×2, luego la matriz resultante será de dimensión 2×2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

6. $C \cdot B$ 3×2 y 2×3, luego la matriz resultante será de dimensión 3×3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 14 \\ -6 & -2 & -4 \\ 9 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Encuentra la matriz inversa, si existe, de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

- Estudio de la matriz A:

$$\left| \begin{array}{rr} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{array} \right| = 7$$

Luego la matriz A tiene inversa

$$A^{-1} = \frac{Adjt(A^T)}{|A|} = \frac{Adjt\left(\left(\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{array}\right)\right)}{7} = \frac{\left(\begin{array}{rr} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right)}{7} = \left(\begin{array}{rr} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ & \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right)$$

- La matriz B no puede tener inversa al no ser una matriz cuadrada.

- Estudio de la matriz C:

$$\left| \begin{array}{rrr} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 \end{array} \right| = 0$$

Luego la matriz C no tiene inversa.

- Estudio de la matriz D:

$$\left| \begin{array}{rrr} -4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right| = -80$$

Luego la matriz D tiene inversa

$$D^{-1} = \frac{Adjt(D^T)}{|D|} = \frac{Adjt\left(\left(\begin{array}{rrr} -4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right)\right)}{-80} = \frac{\left(\begin{array}{rrr} 17 & -9 & 6 \\ -4 & -12 & 8 \\ -7 & -1 & -26 \end{array}\right)}{-80} =$$

$$= \left(\begin{array}{rrr} -\frac{17}{80} & \frac{9}{80} & -\frac{3}{40} \\ \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{1}{10} \\ \frac{7}{80} & \frac{1}{80} & \frac{13}{40} \end{array}\right)$$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular el rango de la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Solución:
Como $|A| = 0$ tendremos que $Rango(A) < 3$. Buscamos entre los menores y encontramos que $\left|\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$