

Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} kx + (1-k)y + (2-k)z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ kx + y + kz = 0 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema para los diferentes valores de k e interpretarlo geoméricamente.
b) Resolver el sistema en el caso de infinitas soluciones.

Islas Baleares (Junio 2006)

Solución:

- a) Se trata de un sistema homogéneo

$$A = \begin{pmatrix} k & 1-k & 2-k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix}, \quad |A| = 2(k-1)^2 = 0 \quad k = 1$$

Si $k \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado. La única solución es la trivial $x = y = z = 0$. En este caso los tres planos se cortan en un punto.

Si $k = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El $|A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ el sistema es Compatible Indeterminado, y como se observa, dos planos coinciden y el tercero les corta en una recta.

- b)

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 Un hombre le dice a su esposa: "¿Te has dado cuenta que desde el día de nuestra boda hasta el día del nacimiento de nuestro hijo transcurrieron el mismo número de años que desde el día de nacimiento de nuestro hijo hasta hoy? En el día del nacimiento de nuestro hijo la suma de nuestras edades era de 55 años". La mujer replicó: "Me acuerdo que en ese día del nacimiento de nuestro hijo, tú tenías la edad que yo tengo ahora y además recuerdo que el día de nuestra boda el doble de la edad que tú tenías excedía en 20 años a la edad que yo tengo hoy". Halla las edades actuales de ambos.

Castilla-La Mancha (Junio 2006)

Solución:

x edad de la madre en el día de hoy.

y edad del padre en el día de hoy.

z años transcurridos desde el día del nacimiento del hijo.

$$\begin{cases} x + y - 2z = 55 \\ x = y - z \\ 2(y - 2z) = x + 20 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 30 \\ y = 35 \\ z = 5 \end{cases}$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcula los valores del parámetro m para los cuales A tiene inversa.
- Para $m = 0$ calcula A^3 y A^{25} .
- Para $m = 0$ calcula la matriz X que verifica $X \cdot A = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Galicia (Junio 2006)

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = m^2 - 1 = 0 \implies m = 1 \quad m = -1$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$ entonces $|A| \neq 0$ y existe A^{-1} .

Si $m = 1$ o $m = -1$ entonces $|A| = 0$ y no existe A^{-1} .

b) Si $m = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -I \cdot A = -A, \quad A^5 = A^4 A = -A^2, \quad A^6 = A^5 A = -A^3 = I$$

A partir de este momento se repiten cíclicamente, luego

$$A^{25} = (A^6)^4 A = IA = A$$

c)

$$X \cdot A = B \implies X = BA^{-1} = (0 \quad -1 \quad -1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1 \quad 0 \quad 1)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$