Problema 1 (5 puntos). Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m:

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y-mz=0 \\ 2x-my=m \\ x+7y-3z=-m \end{array}\right.$$

y resuélvelo para $m=1$ y $m=0$.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -m & 0 \\ 2 & -m & 0 & m \\ 1 & 7 & -3 & -m \end{array}\right), \quad |A|=-m^2-11m+12=0 \Longrightarrow m=1, \;\; m=-12$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq -12 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $m=-12$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 12 & 0 \\ 2 & 12 & 0 & -12 \\ 1 & 7 & -3 & 12 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A)=2$ y como $\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 12 & -12 \\ 1 & 7 & 12 \end{array}\right| = 156\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

Los tres planos se cortan dos a dos.

2. Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A)=2$ y como:

$$\left|\begin{array}{ccc} 11 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 11 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & -1 \end{array}\right| = 0$$

Tenemos Rango($\overline{A}$) = 2 = Rango(A) < nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

3.
- Si $m = 1$: El sistema es compatible indeterminado y no tiene infinitas soluciones.

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2/5 + (1/5)\lambda \\ y = -1/5 + (2/5)\lambda \end{array}\right.$$

- Si $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y = 0 \\ 2x = 0 \\ x + 7y - 3z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Problema 2 (2 puntos). Obtener para todo número natural n, el valor de

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right)^n + \left(\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right)^n$$

(Madrid (Junio 2009)) **Solución:**

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right); \quad B = \left(\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tenemos:

$$A^2 = \left(\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{array}\right) = 2A; \quad A^3 = A \cdot A^2 = 2^2 A; \ldots, A^n = 2^{n-1}A$$

$$B^2 = \left(\begin{array}{rr} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{array}\right) = 2B; \quad B^3 = B \cdot B^2 = 2^2 B; \ldots, B^n = 2^{n-1}B$$

$$A^n + B^n = 2^{n-1}A + 2^{n-1}B = 2^{n-1}(A+B) = 2^{n-1}\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{array}\right) = 2^n \cdot I$$

Problema 3 (2 puntos). Dada la matriz

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

se pide:

1. Estudiar el rango de la matriz A según los valores del parámetro a

2. Obtener la inversa para $a = -1$

(Madrid (junio 2009))

Solución:

1. $|A| = a^3 - 3a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1,\ \ a = -2$:

   Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.

   Si $a = 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 1$.

   Si $a = -2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

2. Si $a = -1 \Longrightarrow |A| = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (1 punto). Dada Resolver la ecuación matricial $AX + B = CX + I$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$AX + B = CX + I \Longrightarrow X = (A - C)^{-1}(I - B)$:

$$A - C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix}$$

$$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - C)^{-1}(I - B) = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$