Problema 1 *(5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & k^2z = & 1 \\ x+ & ky- & kz = & k^2 \\ -x+ & ky- & k^2z = & k^2 \end{array}\right.$$

1. (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

2. (1 punto) Resolverlo para $k = -1$.

(Modelo 2007 - Opción A)
Solución:
1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & k & k^2 & 1 \\ 1 & k & -k & k^2 \\ -1 & k & -k^2 & k^2 \end{array}\right), \quad |A| = 2k^2(k+1) = 0 \Longrightarrow k = 0, \quad k = -1$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ n^o de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El Rango(A) $=$ 1, dado que las tres filas son iguales. Sin embargo el menor $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$. Por tanto, Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).
Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz tiene dos primeras filas iguales, luego Rango(A) =Rango$(\overline{A}) <$ n^o incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 1 \\ -x- & y- & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$
(Junio 2007 - Opción A)
Solución:

$$XAX^{-1} = B \Longrightarrow XA = BX$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 9b-9d \\ 6a-9c & b-d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6a-9c=0 \\ b-d=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b=d \\ c=2/3a \end{array} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2/3a & b \end{pmatrix}, \quad \text{p.e } X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.

2. (1,5 puntos) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

(Junio 2007 - Opción B)
Solución:

1.
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-c=0 \\ b-c=0 \end{array} \right.$$

Las condición que debería de cumplir sería $a = b = c$

2.

$$B^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 & 0 \\ 2^1 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(1 puntos)* El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.
(Septiembre 2008 - Opción B)

Solución:

x: n$^{\text{o}}$ de billetes de 50 euros

y: n$^{\text{o}}$ de billetes de 20 euros

z: n$^{\text{o}}$ de billetes de 10 euros

$$\left\{ \begin{array}{c} 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x + y + z = 225 \\ x + z = 2y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 100 \\ y = 75 \\ z = 50 \end{array} \right.$$