Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -\lambda x+ & y+ & z= & 1\\ x+ & \lambda y+ & z= & 2\\ \lambda x+ & y+ & z= & 1\end{array}\right.$$

1. Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ
2. Resuelve el sistema para $\lambda = 0$

(Andalucía Junio 2011)

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & 2\\ \lambda & 1 & 1 & 1\end{array}\right);\ \ |A|=2\lambda(-\lambda+1)=0\Longrightarrow \lambda=0,\ \lambda=1$$

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = 1$:

  $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right);\ \ |A|=0,\ \ \left|\begin{array}{rr} -1 & 1\\ 1 & 1\end{array}\right|=-2\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

  $$|A_2|=\left|\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

  Como Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A} \Longrightarrow$ Sistema incompatible y no tiene solución.
- Si $\lambda = 0$:

  $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right);\ \ F_1=F_3$$

  Luego el sistema es compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

2. Si $\lambda = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ x+ & & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determina los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

2. Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

(Andalucía Junio 2011)

Solución:

1.

$$B = A^2 + 3A = A(A + 3I) = \begin{pmatrix} (\lambda + 1)(\lambda + 4) & 0 \\ (\lambda + 3) & -2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = -2(\lambda + 1)(\lambda + 4) = 0 \Longrightarrow \lambda = -1, \ \ \lambda = -4$$

- Si $\lambda = -1$ o $\lambda = -4 \Longrightarrow |B| = 0 \Longrightarrow$ No existe inversa.
- Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq -4 \Longrightarrow |B| = 0 \Longrightarrow$ Si existe inversa.

2. $AX + A = 2I \Longrightarrow X = A^{-1}(2I - A)$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \ \ 2I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(2I - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Resuelve este sistema matricial: $\left\{ \begin{array}{c} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{array} \right.$

2. Encuentra una fórmula general para B^n, donde $n \in N$. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz B).

(Castilla La Mancha Junio 2011)

Solución:

1.

$$\left\{\begin{array}{l} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ X+Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \\ \\ Y=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

2.

$$B^1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I \Longrightarrow B^n=\left\{\begin{array}{lr} B \ \text{si} & n \text{ es impar} \\ I \ \text{si} & n \text{ es par} \end{array}\right.$$

Problema 4 (2 puntos). Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 Y 40 euros, respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40500 euros. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30 % de las cajas.

(Andalucía Junio 2009)

Solución:

Sean: x el nº de cajas del 1º mercado, y el nº de cajas del 2º mercado y z el nº de cajas del 3º mercado.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1500 \\ 30x+20y+40z=40500 \\ x=450 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=450 \\ y=750 \\ z=300 \end{array}\right.$$