Problema 1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

a) $A^2 - 2A - 8I$

b) X tal que $AX = I$, (I es la matriz identidad 3×3).

Solución:

a)

$$A^2 - 2A - 8I =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $AX = I \Longrightarrow X = A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Dado el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x+ & 2y- & az = & 1 \\ - & y+ & z = & 0 \\ ax+ & + & z = & a \end{array} \right.$$

a) Discutir el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resolver el sistema en el caso $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & a \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = a^2 - 2a + 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado.

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Como

$$|A_1| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$.

Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y & -z = & 1 \\ - & y+ & z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 3 En un taller de carpintería se fabrican mesas de cocina de formica y de madera. Las de formica se venden a 210 euros y las de madera a 280 euros. La maquinaria del taller condiciona la producción por lo que no se pueden fabricar al día más de 40 mesas de formica ni más de 30 de madera ni más de 50 en total. Si se venden todo lo que se fabrican, ¿cuántas mesas de cada tipo les convendría fabricar para ingresar por su venta la máxima cantidad de dinero posible?

Solución:

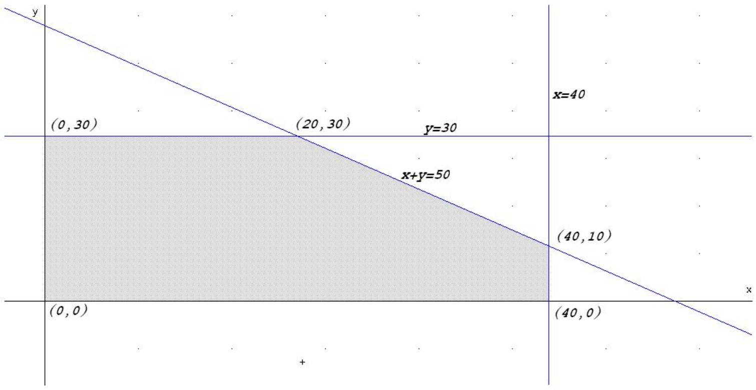
x nº de mesas de formica.
y nº de mesas de madera.

La región factible estaría formada por las restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 40 \\ y \leq 30 \\ x + y \leq 50 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right.$$

La función objetivo sería:

$$z(x,y) = 210x + 280y$$



Buscamos en qué punto la función objetivo tiene el máximo

$$\begin{aligned}
&z(0,0) = 0\\
&z(0,30) = 8400\\
&z(20,30) = 12600\\
&z(40,10) = 11200\\
&z(40,0) = 18400
\end{aligned}$$

El máximo beneficio es de 12600 euros y se obtiene fabricando 20 mesas de formica y 30 mesas de madera.