	I. E. S. ATENEA. SAN SEBASTIÁN DE LOS REYES EXAMEN PARCIAL. SEGUNDA EVALUACIÓN. ÁLGEBRA Curso 2009-2010 **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	01-III-2010

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen consta de dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.
PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 2 puntos.
Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros y un total almacenado de 2000 euros. Si el número total de billetes de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20, averiguar cuántos billetes de cada tipo hay.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 2 puntos.
Estudiar el rango de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro m.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 3 puntos.
Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $A\cdot B = B\cdot A$.

b) (1,5 puntos). Para $a=b=c=1$, calcular B^{10}.

Ejercicio 4.-. **Calificación máxima**: 3 puntos.

a) (1,5 puntos). Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) (1,5 puntos). Resuelve la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 2 puntos.
Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}8&-9\\6&7\end{pmatrix}.$$

Hallar una matriz X tal que $X\cdot A\cdot X^{-1}=B$.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 2 puntos.
Dada la matriz $C=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$, halla dos matrices X e Y que verifican:

$$X+Y^{-1}=C$$
$$X-Y^{-1}=C^{t}$$

siendo C^{t} la matriz traspuesta de C.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 3 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases} x+2y+z=a\\ x+y-az=a\\ 2x+3y+z=a\end{cases}$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Discusión del mismo en función del valor del parámetro a.
b) (1,5 puntos). Resolución en el caso $a\neq 0$.

Ejercicio 4.- **Calificación máxima**: 3 puntos.
Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\2\\-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ y $E=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$.

a) (1 punto). Hallar la matriz AB^{t} donde B^{t} indica la matriz traspuesta de B.
b) (0,5 puntos). Hallar el rango de la matriz $A^{t}D$.
c) (1,5 puntos). Calcular $M=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que verifique $(AB^{t}+C)\cdot M=E$.

SOLUCIONES

OPCIÓN A,

Ejercicio A.1

Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros y un total almacenado de 2000 euros. Si el número total de billetes de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20, averiguar cuántos billetes de cada tipo hay.

Variables.

$x \equiv$ número de billetes de 10 euros.
$y \equiv$ número de billetes de 20 euros.
$z \equiv$ número de billetes de 50 euros.

Planteamiento.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + 50z = 2000 \\ x = 2y \end{array}\right. \underset{F_2/10}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 95 \\ x + 2y + 5z = 200 \\ x - 2y = 0 \end{array}\right.$$

Resolución.

$$A|B = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 95 \\ 200 \\ 0 \end{matrix}\right.\right) \underset{F_2-F_3}{\overset{F_2-F_1}{\sim}} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 95 \\ 105 \\ 200 \end{matrix}\right.\right) \overset{4F_2-F_3}{\sim} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 95 \\ 105 \\ 220 \end{matrix}\right.\right) \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$(3) \Rightarrow 11z = 220 \Rightarrow z = \dfrac{220}{11} = 20$

$(2) \Rightarrow y + 4 \cdot 20 = 105 \Rightarrow y = 105 - 80 = 25$

$(1) \Rightarrow x + 25 + 20 = 95 \Rightarrow x = 95 - 45 = 50$

Solución.

En el cajero automático hay 50 billetes de 10 euros; 25 billetes de 20 euros, y 20 billetes de 50 euros.

Ejercicio A.2

Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro m.

Aplicamos el método de Gauss para averiguar cuántas filas pueden ser linealmente independientes (diferentes de la fila cero:

$$A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix} \underset{F_2-F_3}{\overset{F_1-F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ 0 & m-2 & m^2-2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La tercera fila es siempre distinta de la fila cero.
- La segunda fila será cero cuando $m = 2$; en caso contrario, también será distinta de cero.
- No hay ningún valor de m que haga cero la primera fila.

Luego,

- Si $m = 2 \Rightarrow ran(A) = 2$
- Si $m \neq 2 \Rightarrow ran(A) = 3$

Ejercicio A.3

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

b) (1,5 puntos). Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

----

a) Calculamos los dos productos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y obligamos a que sean iguales:

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a+2c = 5a+2b \\ 5b+2c = 2a+5b \\ 2a+5c = 7c \\ 2b+5c = 7c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = b \\ c = a \end{cases} \Rightarrow a = b = c\,.$$

La condición que se debe cumplir es $a = b = c$.

b) Para $a = b = c = 1$, tenemos:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \quad B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio A.4

a) (1,5 puntos). Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

b) (1,5 puntos). Resuelve la ecuación matricial $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

---

a) Aplicamos el método de Gauss-Jordan para calcular la matriz inversa de A:

$$(A\mid I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{2F_2-F_3}$$

$$\xrightarrow{2F_2-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&2&0&1&1&-1\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{2F_1-F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&-1&1\\0&2&0&1&1&-1\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_j/2}$$

$$\xrightarrow{F_j/2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&-1/2&1/2\\0&1&0&1/2&1/2&-1/2\\0&0&1&-1/2&1/2&1/2\end{array}\right)=(I\mid A^{-1})\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&1/2\\1/2&1/2&-1/2\\-1/2&1/2&1/2\end{pmatrix}.$$

b) Resolvemos la ecuación matricial:

$$A\cdot X=B\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow I\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

y sustituimos:

$$X=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&1/2\\1/2&1/2&-1/2\\-1/2&1/2&1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x=3;\quad y=-2;\quad z=0$$

SOLUCIONES

OPCIÓN B,

Ejercicio B.1

Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}8&-9\\6&7\end{pmatrix}.$$

Hallar una matriz X tal que $X\cdot A\cdot X^{-1}=B$.

Resolvemos la ecuación matricial:

$X\cdot A\cdot X^{-1}=B\Rightarrow X\cdot A\cdot X^{-1}\cdot X=B\cdot X\Rightarrow X\cdot A\cdot I=B\cdot X\Rightarrow X\cdot A=B\cdot X$.

Como no podemos despejar la matriz incógnita X, definimos:

$$X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

y sustituimos:

$$X\cdot A=B\cdot X\Rightarrow\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-9\\6&-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2a&-b\\2c&-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8a-9c&8b-9d\\6a-7c&6b-7d\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a=8a-9c\\-b=8b-9d\\2c=6a-7c\\-d=6b-7c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9c=6a\\9d=9b\\9c=6a\\6d=6b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3c=2a\\d=b\\3c=2a\\d=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a=3c\\b=d\end{cases}.$$

Por lo tanto, las matrices X que verifican la igualdad son de la forma:

$$X=\begin{pmatrix}a & b\\ \frac{2a}{3} & b\end{pmatrix} \text{ ó } X=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \frac{2\lambda_1}{3} & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

Dando valores a los parámetros a y b (ó λ_1 y λ_2) se pueden conseguir algunas de las infinitas soluciones de esta ecuación matricial.

Ejercicio B.2

Dada la matriz $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, halla dos matrices X e Y que verifican:

$$X+Y^{-1}=C$$
$$X-Y^{-1}=C^{t}$$

siendo C^{t} la matriz traspuesta de C.

Sumando las dos ecuaciones obtenemos:

$$2\cdot X=C+C^{t}\Rightarrow 2\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow 2\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación, se obtiene:

$$X+Y^{-1}=C\Rightarrow Y^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}.$$

Calculamos Y, que ha de ser la matriz inversa de Y^{-1}:

$$\left(Y^{-1}\middle|I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}0 & -1/2 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{F_1\leftrightarrow F_2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1/2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1/2 & 1 & 0\end{array}\right)\underset{-2\cdot F_2}{\overset{2\cdot F_1}{\sim}}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 0\end{array}\right)=\left(I\middle|Y\right).$$

Por lo tanto, $Y=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

Ejercicio B.3

Dado el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro a:

$$\begin{cases}x+2y+z=a\\ x+y-az=a\\ 2x+3y+z=a\end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discusión del mismo en función del valor del parámetro a.

b) (1,5 puntos). Resolución en el caso $a\neq 0$.

---

a) Consideramos la matriz asociada al sistema de ecuaciones y aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & -a & a \\ 2 & 3 & 1 & a \end{array}\right) \underset{2F_1-F_3}{\overset{F_1-F_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right) \overset{F_2-F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & a & -a \end{array}\right)$$

- Si $a = 0$, la matriz del sistema queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De la segunda fila se deduce la ecuación $y + z = 0$ que tiene dos incógnitas, por lo tanto se trata de un SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO. (Infinitas soluciones).

- Si $a \neq 0$, obtenemos un sistema COMPATIBLE DETERMINADO. (Solución única).

b) Para $a \neq 0$, tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & a & -a \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

- De (3) se deduce la ecuación:

$$a \cdot z = -a \Rightarrow z = \frac{-a}{a} = -1$$

- Sustituyendo en (2), se obtiene:

$$y + (1+a) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow y = 1 + a$$

- Considerándolo en la fila (1), queda:

$$x + 2 \cdot (1+a) + (-1) = a \Rightarrow x + 2 + 2a - 1 = a \Rightarrow x = -1 - a$$

<u>SOLUCIÓN</u>: $(x, y, z) = (-1-a, 1+a, -1)$

Ejercicio B.4

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto). Hallar la matriz AB^t donde B^t indica la matriz traspuesta de B.

b) (0,5 puntos). Hallar el rango de la matriz A^tD.

c) (1,5 puntos). Calcular $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifique $(AB^t + C) \cdot M = E$.

---

a) $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix}$.

b) $A^t \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (10)$.

Como se trata de una matriz con una fila distinta de cero, $\operatorname{ran}(A^t \cdot D) = 1$.

c) Resolvemos la ecuación matricial:

$(AB^t + C)\cdot M = E \Rightarrow (AB^t + C)^{-1}\cdot(AB^t + C)\cdot M = (AB^t + C)^{-1}\cdot E \Rightarrow I\cdot M = (AB^t + C)^{-1}\cdot E \Rightarrow$

$\Rightarrow M = (AB^t + C)^{-1}\cdot E$.

Calculamos la matriz $AB^t + C$:

$$AB^t + C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su inversa (con paciencia, ya aprenderemos con determinantes):

$$\left(AB^t + C \mid I\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 14 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 21 & 6 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{3F_1-F_3}{\xrightarrow{2F_1-F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_3-F_1}$$

$$\xrightarrow{2F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & -2 & 0 & 5 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{-F_2;\,-F_3}{\xrightarrow{F_1/7}}$$

$$\underset{-F_2;\,-F_3}{\xrightarrow{F_1/7}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/7 & -2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (AB^t + C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/7 & -2/7 & 2/7 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos M:

$$M = (AB^t + C)^{-1}\cdot E = \begin{pmatrix} -1/7 & -2/7 & 2/7 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$