



I. E. S. ATENEA. SAN SEBASTIÁN DE LOS REYES
EXAMEN. SEGUNDA EVALUACIÓN. ÁLGEBRA

Curso 2009-2010

MATERIA: MATEMÁTICAS II

22-III-2010

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen consta de dos opciones, A y B.

El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.

No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 2 puntos.

Obtener para todo número natural n , el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto). Sean A , B y X matrices cuadradas de tamaño n . Despeja X de la ecuación $A \cdot X \cdot B = B^2$.

b) (1 punto). Calcula la matriz X siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} x & + & z & = & 2 \\ x & + & \lambda y & - & z & = & 4 \\ -\lambda x & - & y & - & z & = & -5 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ .

b) (1 punto). Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

c) (1 punto). Resolverlo para $\lambda = -2$.

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 3 puntos.

a) (2,5 puntos). Calcula, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, las soluciones de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = 0$$

b) (0,5 puntos). ¿Para qué valor de a la ecuación anterior tiene una única solución?

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 2 puntos.

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) (1 punto). Comprueba que la inversa de A es A^2 .
b) (1 punto). Comprueba, también, que $A^{518} = B$.

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular el rango de la matriz A según los valores del parámetro:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 3 puntos.

Se consideran las matrices de la forma:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se pide:

- a) (2 puntos). Demuestre que $A(x)$ tiene inversa cualquiera que sea x . Hallar la inversa.
b) (1 punto). Hallar los valores de x tales que $A(x) = I$ (matriz identidad). ¿Es cierto que $A(x) \neq A(y)$ siempre que $x \neq y$?

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 3 puntos. **B1. P 105**

- a) (1,5 puntos). ¿Para qué valores de k tiene el siguiente sistema alguna solución distinta de la trivial $(0, 0, 0)$?

$$\begin{cases} kx - y + z = 2x \\ x + 2ky - kz = y \\ x + ky - z = 0 \end{cases}$$

- b) (1,5 puntos). Resuélvalo en el caso $k = 2$.

SOLUCIONES

OPCIÓN A,

Ejercicio A.1

Obtener para todo número natural n , el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Calculamos las sucesivas potencias del primer sumando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Hacemos lo mismo con el segundo sumando:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & -2^2 \\ -2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & -2^3 \\ -2^3 & 2^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ puntos})$$

Ejercicio A.2

a) (1 punto). Sean A , B y X matrices cuadradas de tamaño n . Despeja X de la ecuación $A \cdot X \cdot B = B^2$.

b) (1 punto). Calcula la matriz X siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Resolvemos la ecuación matricial:

$$A \cdot X \cdot B = B^2 \Rightarrow \underbrace{A^{-1}}_I \cdot \underbrace{A}_I \cdot X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_I = A^{-1} \cdot \underbrace{B^2 \cdot B^{-1}}_B \Rightarrow \underbrace{I \cdot X \cdot I}_X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B. \quad (1 \text{ punto})$$

b) Calculamos la matriz inversa de A : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, con $|A| = 1$.

Los adjuntos son

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Utilizamos el apartado anterior para calcular la matriz X:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \text{ (1 punto)}$$

Ejercicio A.3

Dado el sistema:

$$\begin{cases} x & + & z & = & 2 \\ x & + & \lambda y & - & z & = & 4 \\ -\lambda x & - & y & - & z & = & -5 \end{cases}$$

se pide:

- (1 punto). Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ .
- (1 punto). Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.
- (1 punto). Resolverlo para $\lambda = -2$.

- a) Aplicamos el teorema de Rouché-Fröbenius a las matrices asociadas al sistema de ecuaciones:

$$AB = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 4 \\ -\lambda & -1 & -1 & -5 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

$$|A| = -\lambda - 1 + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - \lambda - 2; \quad |A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

- Si $\lambda \neq 2, \lambda \neq -1$, $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(AB) = \text{número de incógnitas} \Rightarrow$
 \Rightarrow **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO** (Solución única)

- Si $\lambda = 2$, la matriz queda $AB = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$.

Por otra parte, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 2 + 8 + 4 = 0 \Rightarrow \text{ran}(AB) = 2$. Aplicando el teorema

se obtiene: $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(AB) < \text{número de incógnitas} \Rightarrow$

\Rightarrow **SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO** (Infinitas soluciones)

- Si $\lambda = -1$, la matriz queda

$$AB = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right). \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2.$$

Además $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 2 + 2 + 4 = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(AB) = 3$. Aplicando el teorema se

obtiene: $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(AB) = 3 \Rightarrow$

\Rightarrow **SISTEMA INCOMPATIBLE** (No tiene solución)

(1 punto)

b) Consideramos la matriz asociada al sistema: $AB = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, las dos primeras ecuaciones son linealmente independientes. Formamos

un nuevo sistema haciendo $z = \lambda$:

$$AB = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 - \lambda \\ 1 & 2 & 4 + \lambda \end{array} \right)$$

De la primera fila se deduce que $x = 2 - \lambda$. Sustituyendo en la ecuación de la segunda fila, se obtiene $2 - \lambda + 2y = 4 + \lambda \Rightarrow 2y = 2 + 2\lambda \Rightarrow y = 1 + \lambda$.

Solución: $(x, y, z) = (2 - \lambda, 1 + \lambda, \lambda)$.

(1 punto)

c) Para $\lambda = -2$, la matriz asociada al sistema queda $AB = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right)$. Como es

compatible determinado, aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ -5 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-12}{4} = -3; \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-24}{4} = -6;$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{4} = \frac{20}{4} = 5. \quad \text{Solución: } (x, y, z) = (-3, -6, 5).$$

(1 punto)

Ejercicio A.4

a) (2 puntos). Calcula, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, las soluciones de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = 0$$

b) (1 punto). ¿Para qué valor de a la ecuación anterior tiene una única solución?

a) Calculamos el valor del primer determinante de la ecuación aplicando la regla de Sarrus:

$$D_1 = -2x + 2 + 1 - 4x = -6x + 3. \quad (0,5 \text{ puntos})$$

Para calcular el segundo determinante "hacemos ceros" y desarrollamos por la primera fila:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} \stackrel{F_1 - F_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ x & a & x \end{vmatrix} = -x^2 + a. \quad (1 \text{ punto})$$

Por lo tanto la ecuación se convierte en: $-6x + 3 - (-x^2 + a) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + (3 - a) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (3 - a)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{24 + 4a}}{2} = 3 \pm \sqrt{6 + a}. \quad (1 \text{ punto})$$

b) La ecuación tiene solución única si el discriminante es cero $\Rightarrow a = -6. \quad (0,5 \text{ puntos})$

SOLUCIONES

OPCIÓN B,

Ejercicio B.1

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Comprueba que la inversa de A es A^2 .

b) (1 punto). Comprueba, también, que $A^{518} = B$.

a) Si A^2 es la inversa de A , entonces $A^2 \cdot A = I \Rightarrow A^3 = I$. Comprobémoslo:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \quad (1 \text{ punto})$$

b) Al dividir 518 entre 3 se obtiene cociente 172 y resto 2. Aplicando la regla de la división se cumple que $518 = 3 \cdot 172 + 2$. Por lo tanto:

$$A^{518} = A^{3 \cdot 172 + 2} = (A^3)^{172} \cdot A^2 = I^{172} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = B \quad (\text{Apartado anterior}). \quad (1 \text{ punto})$$

Ejercicio B.2

Calcular el rango de la matriz A según los valores del parámetro:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

-
- Calculamos el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 4 - 12 = 0 \Rightarrow$ Las tres primeras columnas son linealmente dependientes.

- Consideramos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$ Las dos primeras columnas son linealmente independientes.

- Completamos el menor con la cuarta columna y la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 4a - 2 - 4 = 4a - 8$$

- Si $a \neq 2 \Rightarrow \text{ran}(A) = 3$.
- Si $a = 2 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$.

(2 puntos)

Ejercicio B.3

Se consideran las matrices de la forma:

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se pide:

- (2 puntos). Demuestre que $A(x)$ tiene inversa cualquiera que sea x . Hallar la inversa.
- (1 punto). Hallar los valores de x tales que $A(x) = I$ (matriz identidad). ¿Es cierto que $A(x) \neq A(y)$ siempre que $x \neq y$?

-
- a) $A(x)$ tiene inversa $\Leftrightarrow |A(x)| \neq 0$. Calculemos su determinante:

$$|A(x)| = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0 \quad (0,5 \text{ puntos})$$

Los adjuntos son

$$A_{11}(x) = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -\sin x \\ 0 & \cos x \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos x \end{vmatrix} = \cos x; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sin x \end{vmatrix} = \sin x;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ 0 & \sin x \end{vmatrix} = 0; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin x \end{vmatrix} = -\sin x; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos x \end{vmatrix} = \cos x$$

Luego,

$$A^{-1}(x) = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}. \quad (1,5 \text{ puntos})$$

$$b) A(x) = I \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ -\operatorname{sen} x = 0 \\ \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \operatorname{sen} x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{N}. \quad (0,5 \text{ puntos})$$

Ejercicio B.4

a) (1,5 puntos). ¿Para qué valores de k tiene el siguiente sistema alguna solución distinta de la trivial $(0, 0, 0)$?

$$\begin{cases} kx - y + z = 2x \\ x + 2ky - kz = y \\ x + ky - z = 0 \end{cases}$$

b) (1,5 puntos). Resuélvalo en el caso $k = 2$.

a) Ordenamos las ecuaciones

$$\begin{cases} kx - y + z = 2x \\ x + 2ky - kz = y \\ x + ky - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-2)x - y + z = 0 \\ x + (2k-1)y - kz = 0 \\ x + ky - z = 0 \end{cases}$$

y consideramos la matriz asociada al sistema, que resulta ser homogéneo:

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & -1 & 1 \\ 1 & 2k-1 & -k \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (k-2) \cdot (2k-1) \cdot (-1) + k + k - (2k-1) - 1 + k^2 \cdot (k-2) = k^3 - 4k^2 + 5k - 2.$$

Resolvemos aplicando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & & 1 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

- Si $\lambda \neq 2, \lambda \neq 1$, $|A| \neq 0 \Rightarrow \operatorname{ran}(A) = 3 = \text{número de incógnitas} \Rightarrow$
 \Rightarrow **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO** (Solución trivial: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$)
- Si $\lambda = 2$ ó $\lambda = 1$, $|A| = 0 \Rightarrow \operatorname{ran}(A) = 2 < \text{número de incógnitas} \Rightarrow$ **SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO** (Infinitas soluciones).
 (1,5 puntos)

b) Para $k = 2$, la matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ las dos primeras filas (ecuaciones) son linealmente independientes.

Formamos un nuevo sistema haciendo $z = \lambda$:

$$AB = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -\lambda \\ 1 & 3 & 2\lambda \end{array} \right)$$

De la primera fila se deduce que $y = \lambda$. Sustituyendo en la ecuación de la segunda fila, se obtiene $x + 3\lambda = 2\lambda \Rightarrow x = -\lambda$.

Solución: $(x, y, z) = (-\lambda, \lambda, \lambda)$.
(1,5 puntos)