INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El examen consta de dos opciones, A y B.
El alumno deberá elegir UNA Y SÓLO UNA de ellas y resolver los cuatro ejercicios de que consta.
No se permite el uso de calculadoras con capacidad de representación gráfica.

PUNTUACIÓN: La calificación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN **A**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 3 puntos.
Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2, \qquad y = 2x + 1,$$

se pide:

a) (1 punto). Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.
b) (1 punto). Calcular el área de dicho recinto acotado.
c) (1 punto). Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

a) (2 puntos). Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.
b) (1 punto). Determinar el valor del parámetro $a > 0$ para el cual es $\int_0^a f(x)\,dx = -1$.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 2 puntos.
Hallar:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x} \right]^{25}$. b) (1 punto). $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+4x^3\right)^{2/x^3}$.

Ejercicio 4.-. **Calificación máxima**: 2 puntos.
Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto). Determinar el dominio de definición de f(x) y las asíntotas verticales de su gráfica.
b) (1 punto). Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

OPCIÓN **B**

Ejercicio 1.- **Calificación máxima**: 2 puntos.
Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}(e^x-1)/(x^2-x) & \text{si} \quad x\neq 0\\ a & \text{si} \quad x=0\end{cases}$$

a) (1 punto). Determinar su dominio y calcular los límites laterales cuando $x\to 1$.
b) (1 punto). Estudiar su continuidad y hallar el valor de a para el que f es continua en $x=0$.

Ejercicio 2.- **Calificación máxima**: 2 puntos.
a) (1 punto). Dada la función:

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2}$$

Hallar el punto o los puntos de la gráfica de f(x) en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.
b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto $x=0$.

Ejercicio 3.- **Calificación máxima**: 3 puntos.
Hallar las dimensiones del jardín rectangular de mayor área que se puede inscribir en un terreno circular de 100 m de radio. Calcular dicho área.

Ejercicio 4.- **Calificación máxima**: 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$$

se pide:
a) (0,75 puntos). Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x).
b) (0,75 puntos). Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de f(x).
c) (0,75 puntos). Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de f(x).
d) (0,75 puntos). Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de f(x), el eje de abscisas y las rectas $y=x+2$, $x=1$.

SOLUCIONES

OPCIÓN A,

Ejercicio A.1

Dadas las funciones:

$$y = 9 - x^2, \qquad y = 2x + 1,$$

se pide:

a) (1 punto). Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.

b) (1 punto). Calcular el área de dicho recinto acotado.

c) (1 punto). Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.

---

a) Se trata de una parábola y una recta. Para representar la parábola necesitamos localizar el vértice y los puntos de corte con el eje X; para representar la recta es suficiente con conocer dos puntos por donde pasa. Para dibujar la región acotada es necesario localizar los puntos de corte entre ambas gráficas.

→ Parábola $y = 9 - x^2$.

Vértice: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2\cdot(-1)} = 0 \Rightarrow y_0 = 9 - 0^2 = 9 \Rightarrow V(0,9)$.

Puntos de corte OX $(y = 0)$: $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$.

→ Recta $y = 2x + 1$.

$x = 0 \Rightarrow y = 2\cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow P(0,1)$

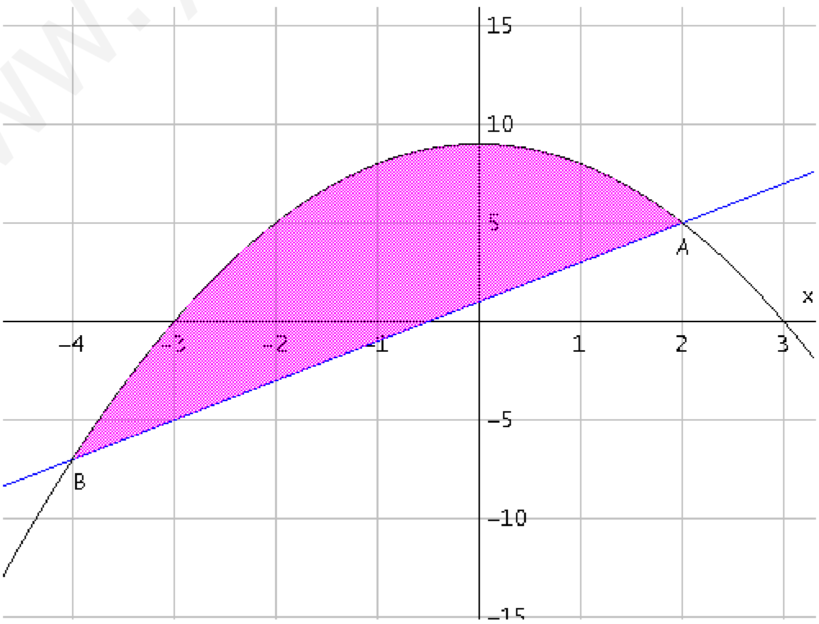
$x = 2 \Rightarrow y = 2\cdot 2 + 1 = 5 \Rightarrow Q(2,5)$

→ Puntos de corte entre las gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y = 9 - x^2 \\ y = 2x + 1 \end{array}\right\} \overset{\text{Igualación}}{\Rightarrow} 2x + 1 = 9 - x^2 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} +2 \\ -4 \end{cases}$$

Las gráficas se cortan en los puntos $A(2,5)$ y $B(-4,-7)$.

Pues ya tenemos todo lo que necesitábamos:



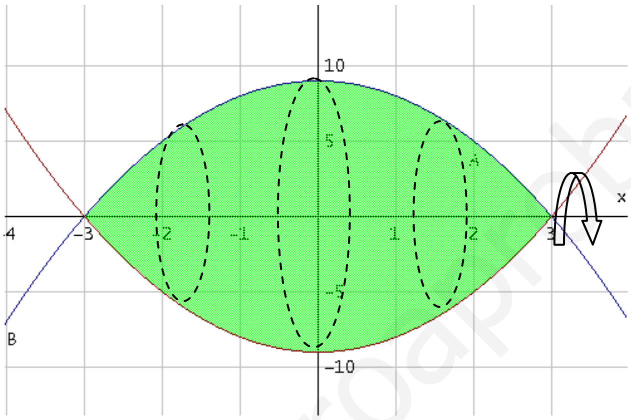
b) El área del recinto acotado es

$$A=\int_{-4}^{2}\left[(9-x^2)-(2x+1)\right]dx=\int_{-4}^{2}(-x^2-2x+8)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+8x\right]_{-4}^{2}=\frac{28}{3}-\left(-\frac{80}{3}\right)=36\ u^2.$$

c) Para calcular el volumen del cuerpo de revolución generado al girar sobre el eje X aplicamos la fórmula:

$$V=\pi\cdot\int_{-3}^{3}\left[f(x)\right]^2dx=\pi\cdot\int_{-3}^{3}\left[9-x^2\right]^2dx=\pi\cdot\int_{-3}^{3}\left[81-18x^2+x^4\right]dx=\pi\cdot\left[81x-6x^3+\frac{x^5}{5}\right]_{-3}^{3}=$$

$$=\pi\cdot\left[\left(243-162+\frac{243}{5}\right)-\left(-243+162-\frac{243}{5}\right)\right]=\pi\cdot\left[486-324+\frac{486}{5}\right]=\frac{1296\pi}{5}\ u^3.$$



Ejercicio A.2

Dada la función $f(x)=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$

a) (2 puntos). Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.

b) (1 punto). Determinar el valor del parámetro $a>0$ para el cual es $\int_0^a f(x)\,dx=-1$.

---

a) Vamos a calcular su derivada y averiguar qué valores la hacen cero:

$$f'(x)=\frac{-4\cdot(1+x^2)^2+4x\cdot2\cdot(1+x^2)\cdot2x}{(1+x^2)^4}=\frac{-4\cdot(1+x^2)+4x\cdot2\cdot2x}{(1+x^2)^3}=\frac{-4-4x^2+16x^2}{(1+x^2)^3}=\frac{12x^2-4}{(1+x^2)^3}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{12x^2-4}{(1+x^2)^3}=0\Rightarrow12x^2-4=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Para decidir si son máximos estudiamos el signo de la derivada alrededor de estos valores:

f'	+	**Máximo relativo**	-	**Mínimo relativo**	+
f	CRECIENTE	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	DECRECIENTE	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	CRECIENTE

$$f'(-1)=\frac{8}{2^3}>0;\qquad f''(0)=\frac{-4}{1^3}<0;\qquad f''(1)=\frac{8}{2^3}>0$$

Sólo queda calcular la segunda coordenada de estos puntos para obtener la solución de este apartado:

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}\cdot 3^2}{3\cdot 4^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4};\qquad f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{-\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\frac{4\sqrt{3}\cdot 3^2}{3\cdot 4^2}=-\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

- La función f tiene un máximo relativo en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.
- La función f tiene un mínimo relativo en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

b) Calculemos la integral (con unos "apañitos" se convierte en seguida en inmediata):

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\,dx=\int_0^a -4x\cdot(1+x^2)^{-2}\,dx=-2\cdot\int_0^a 2x\cdot(1+x^2)^{-2}\,dx=-2\cdot\left[\frac{(1+x^2)^{-1}}{-1}\right]_0^a=$$

$$=-2\cdot\left[\frac{-1}{1+x^2}\right]_0^a=-2\cdot\left[\frac{-1}{1+a^2}+1\right]=\frac{2}{1+a^2}-2.$$

Entonces queda:

$$\int_0^a f(x)\,dx=-1\Rightarrow\frac{2}{1+a^2}-2=-1\Rightarrow\frac{2}{1+a^2}=1\Rightarrow 2=1+a^2\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\sqrt{1}=\begin{cases}+1\\ \cancel{-1}\end{cases}.$$

Ejercicio A.3

Hallar:

a) (1 punto). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}$.

b) (1 punto). $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^3\right)^{2/x^3}$.

---

a) Es un límite muy sencillo pues el numerador y el denominador son del mismo grado, y simplemente dividimos los coeficientes de grado 1:

$$\text{Doce}\ \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{3+5x-8x^3}}{1+2x}\right]^{25}=\left[\frac{\sqrt[3]{-8}}{2}\right]^{25}=\left[\frac{-2}{2}\right]^{25}=(-1)^{25}=-1$$

b) En este caso se obtiene una indeterminación del tipo (1^∞), y para resolverlo aplicamos la propiedad:

$$\text{Doce}\ \lim_{n\to+\infty}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)}.$$

Entonces se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+4x^3\right)^{2/x^3}\overset{(1^\infty)}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^3-1\right)\cdot\frac{2}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x^3}{x^3}}=e^8.$$

Ejercicio A.4

Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto). Determinar el dominio de definición de f(x) y las asíntotas verticales de su gráfica.

b) (1 punto). Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

---

a) Dominio de definición:

Como se trata de un logaritmo, $Dom(f) = \{x \in IR / x^2 + 4x - 5 > 0\}$, así que se trata de resolver una inecuación. Para ello procedemos de la siguiente manera:

1º.- Resolvemos la ecuación asociada:

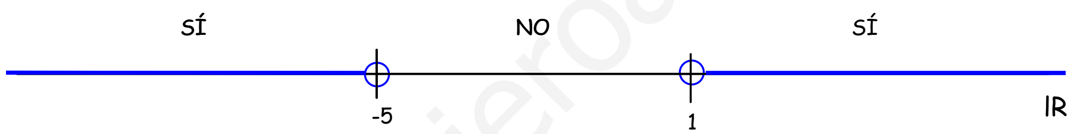
$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

2º.- Representamos las soluciones en la recta real IR y analizamos en qué tramos se cumple la inecuación:

$(-10) \to (-10)^2 + 4 \cdot (-10) - 5 = 55 > 0$ (Cierto, se cumple la inecuación)

$(0) \to 0^2 + 4 \cdot 0 - 5 = -5 > 0$ (Falso, no se cumple la inecuación)

$(10) \to (10)^2 + 4 \cdot 10 - 5 = 135 > 0$ (Cierto, se cumple la inecuación)



Por lo tanto,

$$Dom(f) = (-\infty, -5) \cup (1, +\infty) = \{x \in IR / x < -5 \text{ ó } x > 1\}.$$

Asíntotas verticales:

Sólo pueden estar en los extremos de su dominio de definición. Como

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -5^-} \ln(x^2 + 4x - 5) = -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} \ln(x^2 + 4x - 5) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x = -5} \text{ y } \boxed{x = 1} \text{ son asíntotas verticales de la función.}$$

b) Toda la información relativa a intervalos de crecimiento y decrecimiento nos la ofrece la derivada de la función:

$$f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+4}{x^2 + 4x - 5}.$$

Calculamos el valor que anula la derivada y estudiamos el signo de ésta a ambos lados:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x+4}{x^2+4x-5} = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \notin Dom(f).$$

Como el valor no está en el dominio de la función, estudiamos el signo de la derivada en cada tramo de su gráfica:

$$f'(-10) = \frac{-20+4}{100-40-5} < 0; \qquad f'(10) = \frac{20+4}{100+40-5} > 0$$

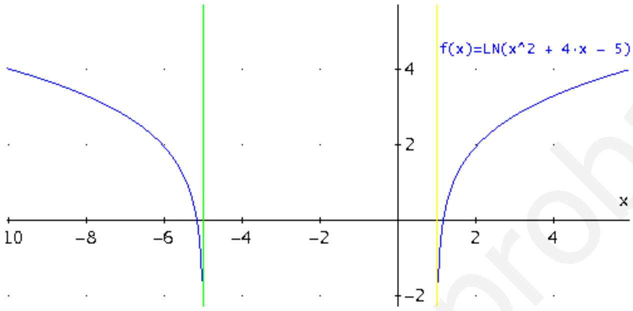
f'	-						+
f	DECRECIENTE	**- 5**	No existe f(x)	**-2**	No existe f(x)	**1**	CRECIENTE

También se podría haber deducido la monotonía teniendo en cuenta el comportamiento de la función alrededor de sus asíntotas verticales.

En todo caso,

- La función f es decreciente $\forall x \in (-\infty, -5)$.
- La función f es creciente $\forall x \in (1, +\infty)$.
- La función f no tiene máximos ni mínimos relativos.

Aunque no nos lo piden, ahí va su gráfica:



OPCIÓN B,

Ejercicio B.1

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)/(x^2 - x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto). Determinar su dominio y calcular los límites laterales cuando $x \to 1$.

b) (1 punto). Estudiar su continuidad y hallar el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

---

a) Dominio de definición. Hay que quitar todos los valores que anulan el denominador:

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{\, 1 \,\}$$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{x = 0}^{(*)} \\ x = 1 \end{cases}$$

(*) Para $x = 0$ la función sí está definida y vale a.

Límites laterales.

→ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x} = -\infty$, pues el numerador es un infinito del orden superior al denominador, y, para valores menores que 1 la fracción tiene signo negativo (+/-).

→ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x} = +\infty$, pues el numerador es un infinito del orden superior al denominador, y, para valores menores que 1 la fracción tiene signo positivo (+/+).

b) <u>Continuidad</u>.

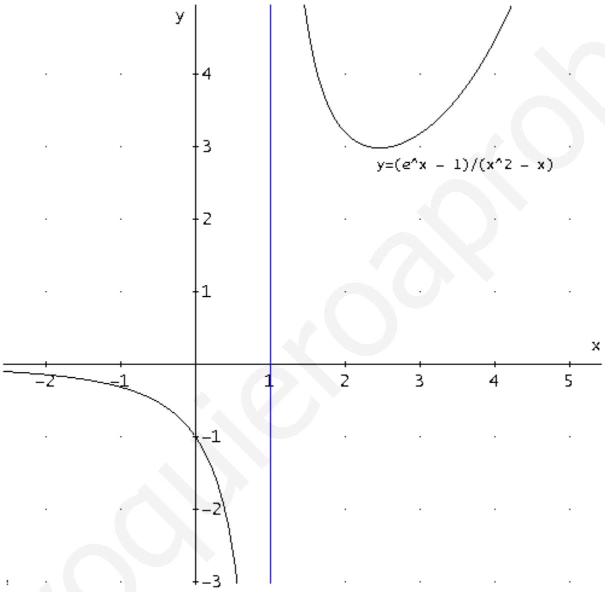
La función es discontinua en $x=1$; como vimos en el apartado anterior, los límites laterales se van a $\pm\infty$, y por lo tanto, se trata de una discontinuidad asintótica de salto infinito.

En $x=0$, la función será continua o no, dependiendo del valor a:

$$a=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2-x}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{L´Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x-1}=\frac{1}{0-1}=-1.$$

- La función f presenta una discontinuidad de tipo asintótico en $x=1$.
- La función f es continua en $x=0$ cuando $a=-1$; en caso contrario se trataría de una discontinuidad evitable y salto finito.

La gráfica de la función cuando $a=-1$ es la siguiente:



Si $a\neq -1$, el punto $(0,-1)$ quedaría "hueco" y la ordenada en 0 estaría ubicada en el eje Y a la altura a.

Ejercicio B.2

a) (1 punto). Dada la función:

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2}$$

Hallar el punto o los puntos de la gráfica de f(x) en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto $x=0$.

---

a) La pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada de la función en el punto de abscisas donde se traza:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(1-x^2)-x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x)=1 \Rightarrow 1+x^2=(1-x^2)^2 \Rightarrow 1+x^2=1-2x^2+x^4 \Rightarrow x^4-3x^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\cdot(x^2-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

Ahora calculamos su segunda coordenada:

$$f(0)=\frac{0}{1-0^2}=0\,; \qquad f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\,; \qquad f(-\sqrt{3})=\frac{-\sqrt{3}}{1-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,;$$

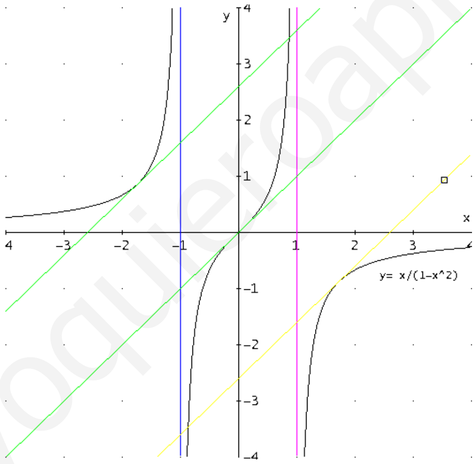
y ya tenemos la solución:

- Los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de la función tiene pendiente 1 son $(0,0)$, $\left(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Vamos a por la ecuación de la recta tangente:

$$r_{t(0,0)} \equiv y-0=f'(0)\cdot(x-0) \Rightarrow r_{t(0,0)} \equiv y=1\cdot x \Rightarrow \boxed{r_{t(0,0)} \equiv y=x}.$$

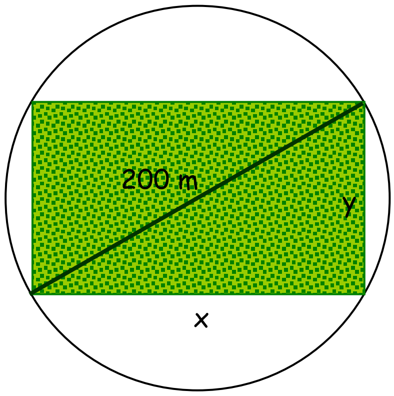
Esto era muy facilito, estaba todo prácticamente hecho. Como en otras ocasiones, para entretenernos, vamos a pintar la función y las rectas tangentes de pendiente 1:



Ejercicio B.3

Hallar las dimensiones del jardín rectangular de mayor área que se puede inscribir en un terreno circular de 100 m de radio. Calcular dicho área.

Se trata del típico problema de optimización, así que, hacemos un dibujo de la situación y seguimos el protocolo de resolución marcado en clase.
Al trazar el diámetro conseguimos dos triángulos rectángulos.



1. Relación entre las variables.

$T^{\underline{ma}}$ de Pitágoras $\rightarrow x^2+y^2=200^2 \Rightarrow y=\sqrt{200^2-x^2}$.

2. Función objetivo.

Se trata de maximizar el área de un rectángulo $\rightarrow f(x,y)=x\cdot y$

3. Planteamiento y resolución.

Formamos una especie de sistema de ecuaciones para conseguir que la función a optimizar sólo tenga una variable:

$$\begin{cases} y=\sqrt{200^2-x^2} \\ f(x,y)=x\cdot y \end{cases} \overset{\text{SUSTITUCIÓN}}{\Rightarrow} f(x)=x\cdot\sqrt{200^2-x^2}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{40000-x^2}=\sqrt{40000x^2-x^4}$$

Calculamos su derivada para localizar el máximo de la función:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(40000x^2-x^4)^{-1/2}\cdot(80000x-4x^3)=\frac{4x\cdot(20000-x^2)}{2\cdot\sqrt{40000x^2-x^4}}=\frac{2x\cdot(20000-x^2)}{\sqrt{40000x^2-x^4}}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x\cdot(20000-x^2)}{\sqrt{40000x^2-x^4}}=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{20000}=\pm100\cdot\sqrt{2}. \end{cases}$$

Por la naturaleza del problema descartamos el valor negativo y el cero. Comprobamos que, efectivamente, $x=100\cdot\sqrt{2}$ es un máximo relativo (cambia de creciente a decreciente):

f'	+	**Máximo relativo**	-
f	CRECIENTE ($\nearrow$)	$100\cdot\sqrt{2}$	DECRECIENTE ($\searrow$)

$$f'(100)=\frac{+\cdot+}{+}>0; \qquad f'(150)=\frac{+\cdot-}{+}<0.$$

Calculamos otra dimensión del jardín y su superficie:

$$y=\sqrt{40000-\left(100\cdot\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{40000-20000}=\sqrt{20000}=100\cdot\sqrt{2}.$$

$$f\left(100\cdot\sqrt{2},100\cdot\sqrt{2}\right)=100\cdot\sqrt{2}\cdot100\cdot\sqrt{2}=20000.$$

Ya sólo queda redactar la solución.

4. Solución.

El jardín es un cuadrado de $100\cdot\sqrt{2}$ metros de lado por lo que encierra una superficie de 20000 metros cuadrados.

Ejercicio B.4

Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$$

se pide:

a) (0,75 puntos). Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x).

b) (0,75 puntos). Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de f(x).

c) (0,75 puntos). Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de f(x).

d) (0,75 puntos). Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de f(x), el eje de abscisas y las rectas $y=x+2$, $x=1$.

---

a) Analizamos el signo de la derivada alrededor de los valores que la anulan:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2+2)\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3-4x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

f'	+	**Máximo relativo**	-
f	CRECIENTE	0	DECRECIENTE

$$f'(-10) = \frac{20}{101^2} > 0;\ f'(10) = \frac{-20}{101^2} < 0$$

Ahora formalizamos el resultado obtenido:

- La función f es creciente $\forall x \in (-\infty, 0)$.
- La función f es decreciente $\forall x \in (0, +\infty)$.

b) Para calcular los puntos de inflexión recurrimos a la segunda derivada. Son "candidatos" los puntos que la anulan:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2\cdot(x^2+1)^2 + 2x\cdot 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow 6x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ahora comprobamos si hay cambio de curvatura alrededor de estos dos valores para decidir si son puntos de inflexión o no.

f''	+	**Punto de inflexión**	-	**Punto de inflexión**	+
f	CÓNCAVA	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	CONVEXA	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	CÓNCAVA

$$f''(-1) = \frac{4}{8} > 0; \qquad f''(0) = \frac{-2}{1} < 0; \qquad f''(1) = \frac{4}{8} > 0$$

De nuevo formalizamos el resultado de este segundo apartado:

La función f tiene dos puntos de inflexión de coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{4}\right)$.

c) <u>Asíntotas verticales</u>.- En una función racional deben ser los valores que anulen el denominador. En este caso $x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto no tiene este tipo de asíntotas.

<u>Asíntotas horizontales</u>.- Como el numerador y el denominador son del mismo grado, la función tendrá asíntota horizontal. Su ecuación es:

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2}{x^2+1} = \frac{1}{1} = 1.$$

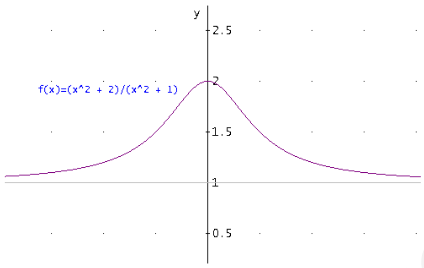
<u>Asíntotas oblicuas</u>.- Al tener asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.

Para representar la función tendremos en cuenta los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el máximo relativa, la curvatura y los puntos de inflexión, la asíntota horizontal, y que no corta al eje X.

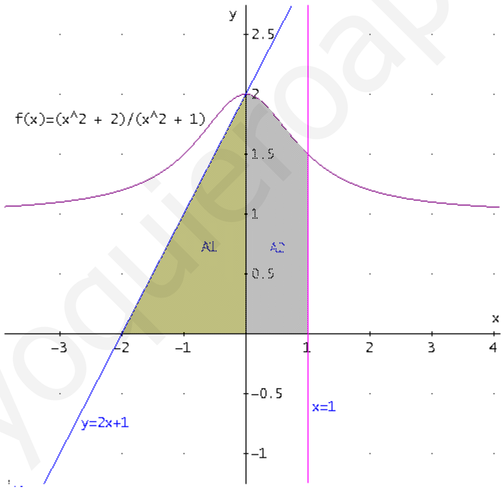
Tabla de valores

x	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
y	2	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$

Gráfica



d) Identificamos el recinto acotado dibujando las rectas $x=1$ e $y=2x+1$:



Una forma sencilla de determinar la superficie coloreada es dividirla en dos, de tal forma que la primera región resulta ser un triángulo. Entonces, el área total es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{b \cdot h}{2} + \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx}_{I_1} = \frac{2 \cdot 2}{2} + I_1 = 2 + I_1 \overset{(*)}{=} 2 + 1 + \frac{\pi}{4} = \boxed{\left(3 + \frac{\pi}{4}\right) u^2}.$$

(*) Como es una integral racional, hacemos la división:

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & +2 & x^2+1 \\ \cline{3-3} -x^2 & -1 & 1 \\ \hline & +1 & \end{array}$$

y se obtiene $I_1 = \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \left[x + \operatorname{arc\,tg} x\right]_0^1 = 1 + \frac{\pi}{4}$