

1. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))} = \left( \frac{0}{0} = ? \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-3 \operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}}{\frac{-2 \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \operatorname{tg} 3x}{-2 \operatorname{tg} 2x} = \left( \frac{0}{0} = ? \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot 3 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 3x)}{2 \cdot 2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 2x)} = \frac{9}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x} = \left( \frac{0}{0} = ? \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}} - \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}}{4} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{8}$$

2. Dada la función  $f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$

a) Encontrar los puntos de discontinuidad de  $f$ . Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

b) Estudiar si  $f$  tiene alguna asíntota vertical.

a) Las discontinuidades estarán en los valores de  $x$  que anulen el denominador:

$$1 - x^6 = 0, \quad x^6 = 1, \quad x = 1 \quad \text{ó} \quad x = -1$$

En esos dos valores  $f$  no es continua pues no existe ni  $f(-1)$  ni  $f(1)$ . Para cualquier otro valor de  $x$ ,  $f$  sí será continua pues es una función racional (cociente de polinomios).

Para ver si son evitables hay que calcular los límites cuando  $x \rightarrow -1$  y cuando  $x \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 (1 - x^3)}{(1 + x^3)(1 - x^3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5}{(1 + x^3)} = \frac{1}{2}$$

Este límite se podría también haber resuelto mediante la regla de l'Hôpital. Al obtener un valor concreto (un número) la discontinuidad que hay en  $x = 1$  es evitable; bastaría asignar a la función  $f$  el valor  $f(x = 1) = 1/2$ .

Veamos ahora qué sucede en  $x = -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left( \frac{-2}{0} \right) = \infty$$

Por tanto en  $x = -1$  la discontinuidad es inevitable y la gráfica va a tener una asíntota vertical. Puede completarse viendo que los límites laterales van a ser de diferente signo (aunque esto no es estrictamente necesario, en todo caso en el apartado b).

b) Hay una asíntota vertical en  $x = -1$ , pero no la hay en  $x = 1$ .

3. a) Dibujar la gráfica de la función  $g(x) = e^x - x$ .

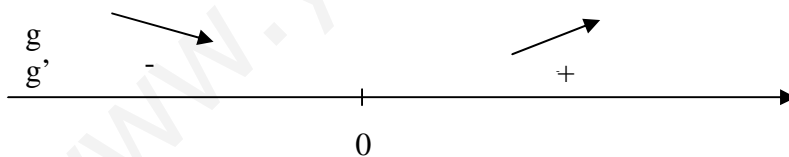
b) Calcular el dominio de definición de  $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$  y su comportamiento para  $x \rightarrow \infty$  y  $x \rightarrow -\infty$ .

c) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de  $f(x)$  en su dominio de definición.

a) Hay que representar  $y = g(x)$  pero hay que hacerlo tan rápido como se pueda. En estos casos lo más práctico es calcular la primera derivada y las asíntotas, que son las informaciones más representativas.

El dominio de  $g$  es todo  $\mathbb{R}$  (no puede haber asíntotas verticales).

$$g'(x) = e^x - 1; \quad g'(x) = 0, \quad e^x - 1 = 0, \quad e^x = 1, \quad x = 0$$



Hay un mínimo en  $(0, 1)$ .

En este caso, la segunda derivada resulta muy sencilla:  $g''(x) = e^x$ ,  $g''(x)$  es siempre positiva y la gráfica de  $g(x)$  tiene que ser siempre cóncava vista desde arriba.

Asíntotas horizontales:  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x) = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = (0 + \infty) = \infty$$

Por tanto no hay asíntotas horizontales.

Oblicuas:

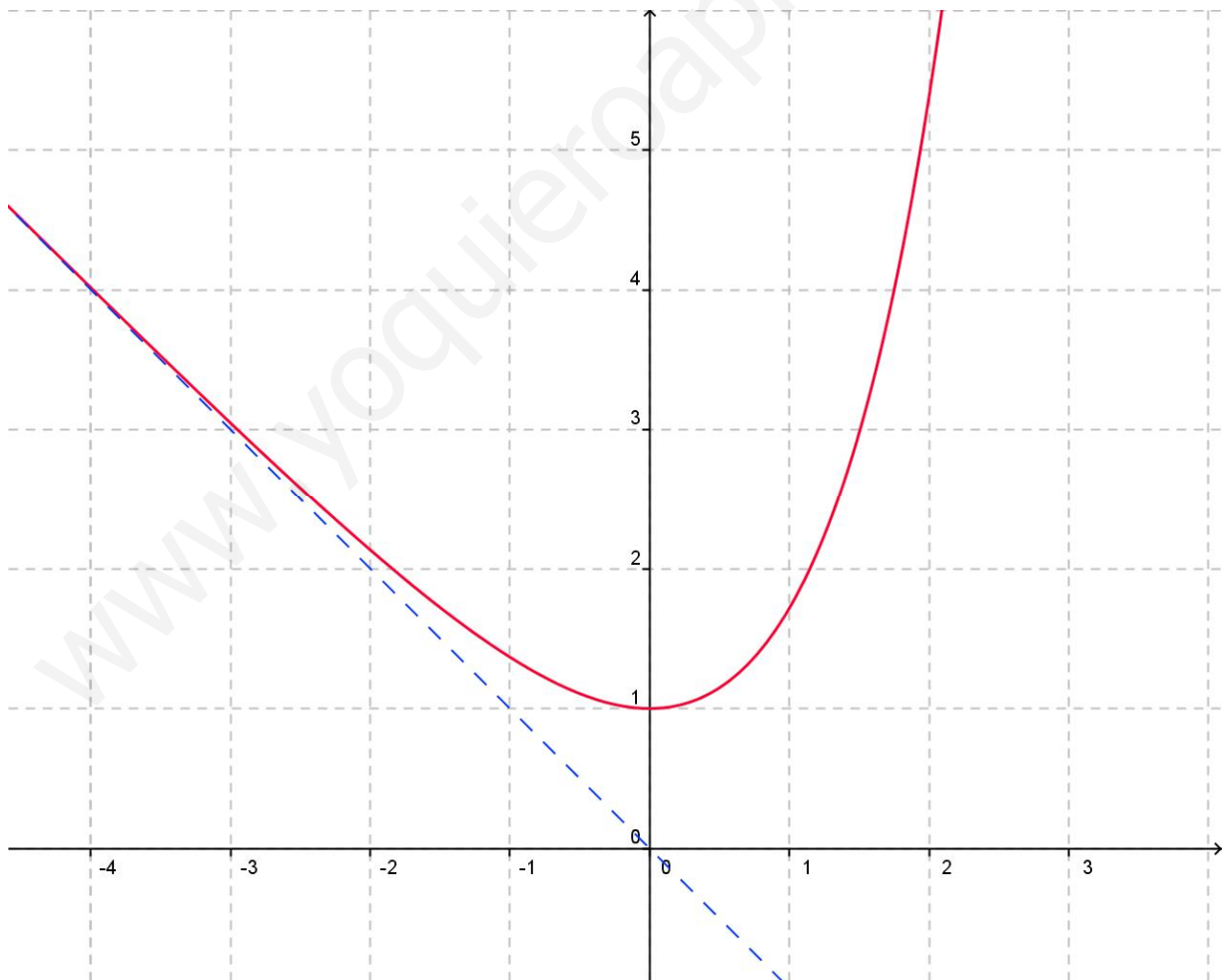
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 1) = \infty \quad \text{hay una rama parabólica vertical por } +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$$

hay una asíntota oblicua (de pendiente  $m = -1$ ) por  $-\infty$ .

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - x - (-1)x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Así que dibujamos rápidamente la recta  $y = -x$  y la gráfica de  $g(x)$ :

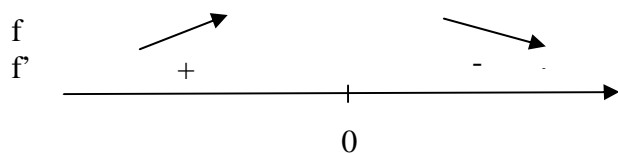


b) Dominio de  $f(x) = 1 / g(x)$ . Como  $g(x) > 0$  siempre, pues resulta que el denominador de  $f(x)$  nunca va a valer 0. El dominio de  $f(x)$  es todo  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x - x} = \left( \frac{1}{\infty} \right) = 0^+ \quad \text{asíntota horizontal ( } y = 0, \text{ eje OX).}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - x} = \left( \frac{1}{-\infty} \right) = 0^+ \quad (\text{también OX es asíntota horizontal por } -\infty)$$

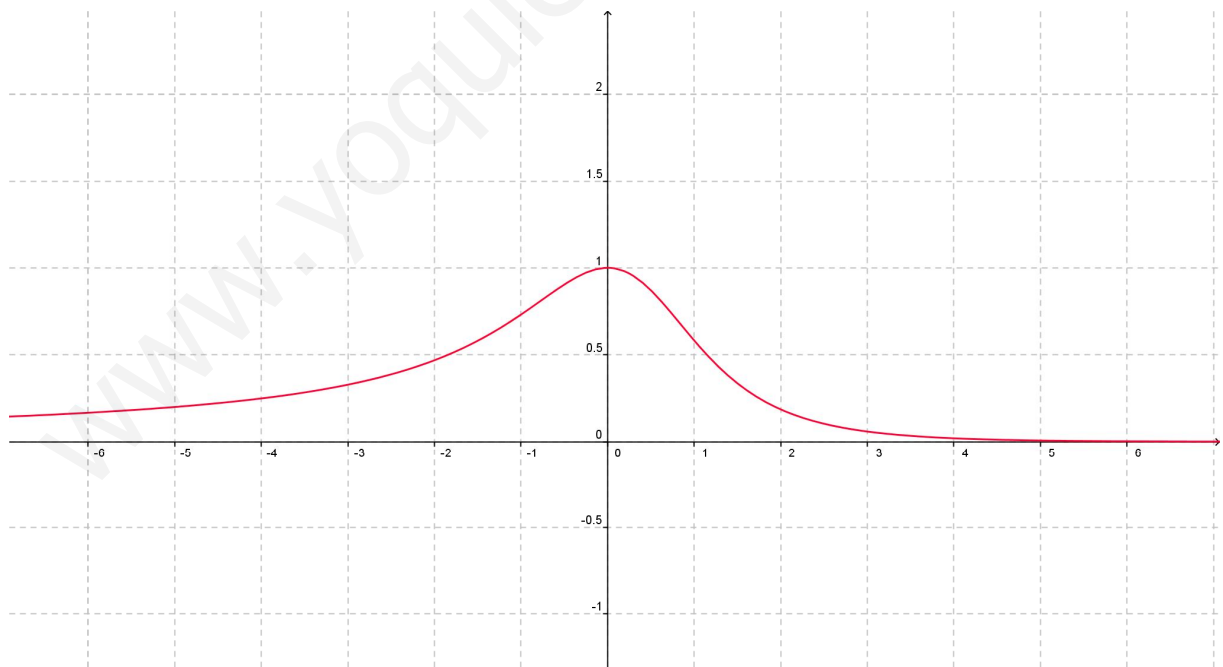
c)  $f'(x) = \frac{-e^x + 1}{(e^x - x)^2} \quad f'(x) = 0, \quad e^x = 1, \quad x = 0$



El máximo absoluto (y relativo) de  $f(x)$  se alcanza en  $x = 0$  ( $y = 1$ ).

No existe mínimo absoluto de  $f(x)$  porque  $f(x) > 0$  siempre y tiene como asíntota horizontal al eje OX ( $y = 0$ ); es decir, no hay ningún valor de la  $x$  para el cual se obtenga  $y = 0$ , así que no se llega nunca a alcanzar ese valor mínimo.

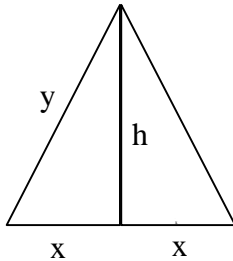
La gráfica de  $f(x)$  es:



Derivadas Modelo examen 2

1. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Llamamos  $x$  = la mitad de la base,  $h$  = la altura,  $y$  = cualquiera de los dos lados iguales.



$$\text{perímetro} = 2x + 2y = 8, \quad x + y = 4, \quad y = 4 - x$$

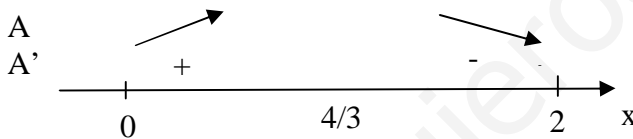
$$h = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{(4-x)^2 - x^2} = \sqrt{16-8x}$$

$$\text{Área } A = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = x \cdot h = x \cdot \sqrt{16-8x}$$

$$A' = \sqrt{16-8x} + \frac{-8}{2\sqrt{16-8x}} \cdot x = \sqrt{16-8x} - \frac{4x}{\sqrt{16-8x}}$$

$$A' = 0 \rightarrow \sqrt{16-8x} = \frac{4x}{\sqrt{16-8x}} \rightarrow 16-8x = 4x \rightarrow 16 = 12x \rightarrow x = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Los valores que puede tomar la  $x$  están limitados por el contexto del problema:  $x$  ha de ser una longitud, así que  $x > 0$  y para que el perímetro pueda ser 8 el máximo valor posible de  $x$  es 2 (saldría un triángulo plano).



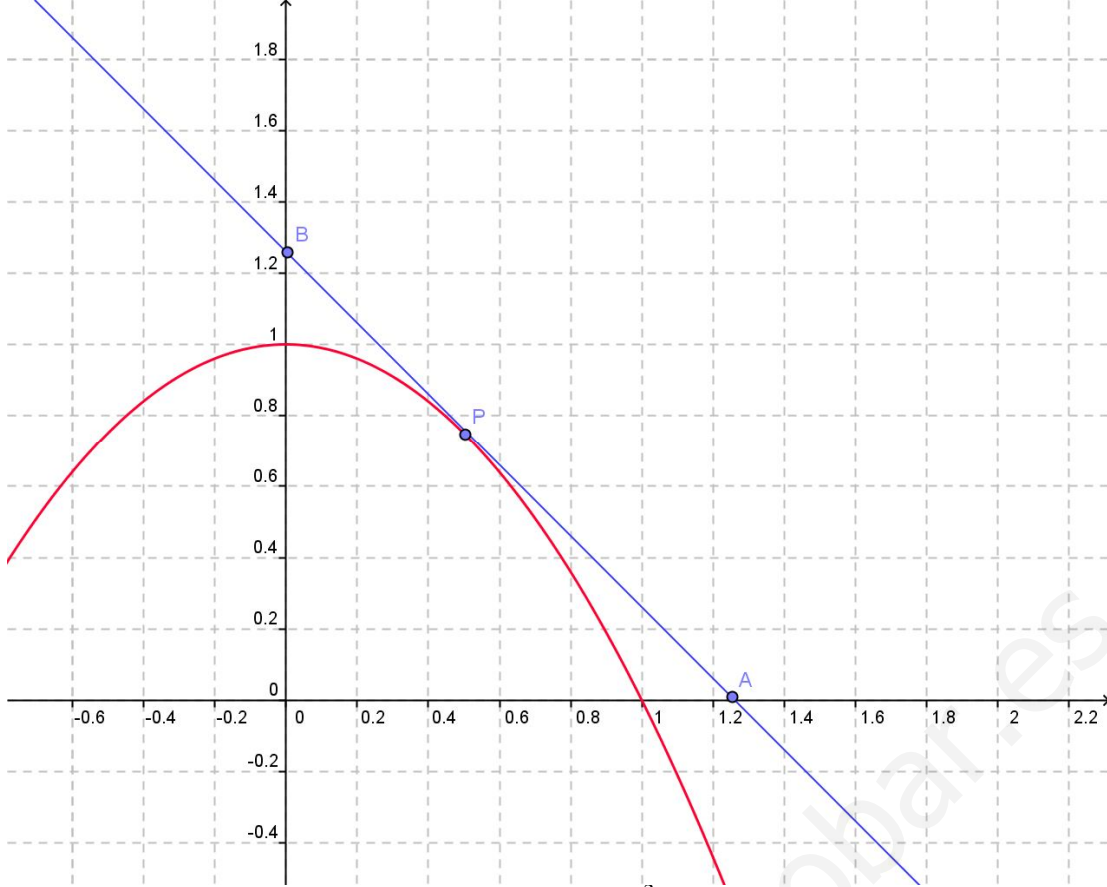
Se confirma que la máxima área se obtiene para  $x = 4/3$ .

La base del triángulo medirá  $2x = 8/3$  y la altura será  $h = \sqrt{16 - \frac{32}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2,31$

2. Dada la función  $f(x) = 1 - x^2$ , se pide:

- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $P [ a , f(a) ]$ , donde  $0 < a < 1$ .
- Hallar los puntos A y B de corte de esa recta con los ejes OX, OY respectivamente.
- Determinar el valor de  $a$  ( $0 < a < 1$ ) para el cual la distancia PB es el doble que la distancia PA.

Antes de nada: gráfica de la función  $f$  y situación de los puntos P, A y B.



a) Punto de tangencia  $P [ a , f(a) ] = P ( a , 1 - a^2 )$

Pendiente de la recta tangente (t):  $m = f'(x = a) = [ f'(x) = - 2 x ] = - 2 a$

Ecuación de t:  $y - (1 - a^2) = - 2 a (x - a)$  ,  $y = 1 - a^2 - 2ax + 2 a^2 = - 2 a x + 1 + a^2$

b) A = corte de t con OX ( $y = 0$ ) ,  $- 2 a x + 1 + a^2 = 0$  ,  $x = \frac{1+a^2}{2a} \rightarrow A \left( \frac{1+a^2}{2a}, 0 \right)$

B = corte de t con OY ( $x = 0$ ) ,  $B ( 0 , 1 + a^2 )$

$$\begin{aligned} \text{c) } d(P, A) &= \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a} - a\right)^2 + (1-a^2)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+a^2-2a^2}{2a}\right)^2 + (1-a^2)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2 + (1-a^2)^2} = \sqrt{(1-a^2)^2 \left(\frac{1}{4a^2} + 1\right)} = (1-a^2) \sqrt{\frac{1+4a^2}{4a^2}} = \frac{(1-a^2)}{2a} \sqrt{1+4a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(P, B) &= \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_B - y_P)^2} = \sqrt{a^2 + [1+a^2 - (1-a^2)]^2} = \sqrt{a^2 + (2a^2)^2} = \\ &= \sqrt{a^2 + 4a^4} = \sqrt{a^2 (1+4a^2)} = a \sqrt{1+4a^2} \end{aligned}$$

$$\text{d) } d(P, B) = 2 d(P, A) \rightarrow a = 2 \frac{1-a^2}{2a} \rightarrow a^2 = 1-a^2 \rightarrow 2a^2 = 1 \rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. Calcular  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$  sea continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ .

Para esos valores aplicar el teorema del Valor Medio a  $f$  en el intervalo  $[-2,1]$

Si  $|x| < 1$  la fórmula que define la función es polinómica (continua y derivable). La otra fórmula podría tener un problema en  $x = 0$ , pero ese valor no está en su campo de definición. Así que los únicos puntos conflictivos son  $x = \pm 1$ .

Pero  $f$  es una función par, simétrica respecto al eje OY, por lo que es suficiente hacer el estudio para  $x = 1$ .

Para que  $f$  sea continua en  $x = 1$ :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2} = 1 \end{cases}$$

Es preciso que  $a + b = 1$ .

La expresión de  $f'$  resulta ser:

$$f' = \begin{cases} 2ax & \text{si } |x| < 1 \\ -\frac{2}{x^3} & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Para que  $f$  sea derivable en  $x = 1$ :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2ax = 2a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{x^3} = -2 \end{cases}$$

$$2a = -2, \quad a = -1$$

Y para que  $a + b = 1$ ,  $b = 2$

Para aplicar el teorema del Valor Medio, calculamos las coordenadas de los puntos inicial y final del intervalo:  $A(-2, 1/4)$  y  $B(1, 1)$ .

$m =$  pendiente de la recta  $AB = \frac{3/4}{3} = \frac{1}{4}$  y hay que resolver  $f'(x) = 1/4$

$$f' = \begin{cases} -2x & \text{si } |x| < 1 \\ -\frac{2}{x^3} & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x = \frac{1}{4} \\ -\frac{2}{x^3} = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{8} \\ -8 = x^3 \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

$x_1$  es una solución correcta porque está en su campo de definición ( $|x| < 1$ ) y dentro del intervalo  $(-2, 1)$  dado en el enunciado. En cambio la segunda posibilidad  $x_2$  está fuera del intervalo  $(-2, 1)$  por lo que no se puede considerar solución correcta.