Otras integrales

24. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{2}{1+x^2}dx$ b) $\int \frac{2x}{1+x^2}dx$ c) $\int \frac{2}{1-x^2}dx$ d) $\int \frac{2}{(1+x)^2}dx$ e) $\int \frac{2x}{(1+x)^2}dx$

Solución:
Obsérvese que las cinco integrales tienen cierto parecido. No obstante, sus resultados son muy diferentes.

a) Es inmediata: $\int \frac{2}{1+x^2}dx = 2\cdot\int \frac{1}{1+x^2}dx = 2\arctan x + c$.

b) También es inmediata: $\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln\left(1+x^2\right)+c$.

c) Hay que hacerla por descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{2}{1-x^2}dx = \int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = \ln(1+x)+\ln(1-x)+c$$

d) Es inmediata: $\int \frac{2}{(1+x)^2}dx = 2\int (1+x)^{-2}dx = 2\cdot\frac{(1+x)^{-1}}{-1}+c = -\frac{2}{1+x}+c$.

e) Hay que hacerla por descomposición en fracciones.

$$\int \frac{2x}{(1+x)^2}dx = \int \frac{2x+2-2}{(1+x)^2}dx = \int \frac{2(1+x)}{(1+x)^2}dx + \int \frac{-2}{(1+x)^2}dx = \int \frac{2}{(1+x)}dx - 2\int (1+x)^{-2}dx =$$

$$= 2\ln(1+x)+\frac{2}{1+x}+c$$

25. Propuestos en UNED. Resuelve:

a) $\int \frac{x^2-1}{4x^2+1}dx$ b) $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$ c) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ d) $\int 2\ln x dx$

Solución:

a) Para resolver $\int \frac{x^2-1}{4x^2+1}dx$ hay que transformar el integrando.

Dividiendo:

$\frac{x^2-1}{4x^2+1} = \frac{1}{4} - \frac{5/4}{4x^2+1}$ → (La división debe hacerse aplicando el algoritmo tradicional).

Luego: $\int\left(\frac{1}{4}-\frac{5/4}{4x^2+1}\right)dx = \int \frac{1}{4}dx - \frac{5}{8}\int \frac{2}{(2x)^2+1}dx = \frac{1}{4} - \frac{5}{8}\arctan(2x)+c$

b) $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx \Rightarrow \frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow A = 2;\ B = 3$

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx = \int \frac{2}{x-2}dx + \int \frac{3}{x+2}dx = 2\ln(x-2)+3\ln(x+2)+c$$

c) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ → Partes: $\left(\ln x = u;\quad \frac{1}{x^2}dx = dv\right) \Rightarrow \left(du = \frac{1}{x}dx;\quad v = -\frac{1}{x}\right)$

Luego: $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}+c$

d) $\int 2\ln x dx \to$ Partes: $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$; $dv=dx \Rightarrow v=x$

Luego: $2\int \ln x dx = 2\left(x\ln x - \int dx\right) = 2\left(x\ln x - x\right)+c$

26. Resuelve:

a) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\sqrt{x}\right)dx$ b) $\int \cos^2 x\, dx$ c) $\int \frac{7x+2}{x^2-6x+10}dx$

<u>Solución</u>:

a) La $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\sqrt{x}\right)dx$ puede considerarse inmediata, de la forma $\int f´\cdot\cos f dx = \sin f$, con $f=\sqrt{x}$. En este caso: $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\sqrt{x}\right)dx = \sin\sqrt{x}+c$

No obstante, puede ser más asequible hacer el cambio $t=\sqrt{x} \Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Obteniéndose:

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\sqrt{x}\right)dx = \int \cos\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right) = \int \cos t dt = \sin t + c = \sin\sqrt{x}+c$$

b) La integral $\int \cos^2 x\, dx$ puede hacerse por partes.

Haciendo: $u=\cos x$ y $\cos x dx = dv \Rightarrow du=-\sin x dx$; $v=\sin x$

Luego:

$$\int \cos^2 x\, dx = \cos x\cdot\sin x + \int \sin^2 x\, dx = \cos x\cdot\sin x + \int\left(1-\cos^2 x\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x dx = \cos x\cdot\sin x + \int dx - \int\cos^2 x dx \Rightarrow 2\int \cos^2 x dx = \cos x\cdot\sin x + x$$

Despejando: $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x + \frac{x}{2}+k$

<u>De otra forma</u>: Haciendo el cambio trigonométrico $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, se tiene:

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int\left(1+\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+k$$

c) $\int \frac{7x+2}{x^2-6x+10}dx \to$ Puede escribirse en el numerador la derivada del denominador.

Así:

$$\frac{7x+2}{x^2-6x+10} = \frac{\frac{7}{2}\left(2x-6\right)+23}{x^2-6x+10} = \frac{7}{2}\cdot\frac{\left(2x-6\right)}{x^2-6x+10} + \frac{23}{x^2-6x+10} = \frac{7}{2}\cdot\frac{\left(2x-6\right)}{x^2-6x+10} + \frac{23}{1+\left(x-3\right)^2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{7x+2}{x^2-6x+10}dx = \int \frac{7}{2}\cdot\frac{\left(2x-6\right)}{x^2-6x+10}dx + \int\frac{23}{1+\left(x-3\right)^2}dx =$$

$$= \frac{7}{2}\ln(x^2-6x+10) + 23\arctan(x-3)+c$$

27. Integra:

a) $\int \frac{e^x+e^{2x}}{1+e^x}dx$ b) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$ c) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$ d) $\int \tan^2 x dx$ e) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

Solución:

a) Sacando factor común en el numerador:

$$\int \frac{e^x+e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x\left(1+e^x\right)}{1+e^x}dx = \int e^x dx = e^x + c$$

b) Haciendo el cambio $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow$

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x \cdot e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{t}{1+t}dt = \int\left(1-\frac{t}{1+t}\right)dx = t-\ln\left(1+t\right)+c = e^x-\ln\left(1+e^x\right)+c$$

c) Es inmediata, aunque puede hacerse el cambio $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$.

Por tanto: $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{-1}{t^4}dx = -\int t^{-4}dt = -\frac{t^{-3}}{-3}+c = \frac{1}{3t^3}+c = \frac{1}{3\cos^3 x}+c$

d) Sumando y retando 1 al integrando se tiene:

$$\int \tan^2 x dx = \int\left(1+\tan^2 x-1\right)dx = \int\left(1+\tan^2 x\right)dx - \int dx = \tan x - x + c$$

e) Haciendo $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$; de donde:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^3}}dt = \arcsin t + c = \arcsin x^2 + c$$

28. (Propuesto en Selectividad, Aragón, junio 13 y septiembre 14)

a) Determina la función $f(x)$ cuya derivada es $f'(x) = 2xe^{5x}$ y que verifica que $f(0) = 2$.

b) La derivada de una función $f(x)$ es: $\left(x-1\right)^3\left(x-3\right)$. Determina la función $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 1$.

Solución:

a) La función $f(x)$ es una primitiva de $f'(x) = 2xe^{5x}$: $f(x) = \int 2xe^{5x}dx$.

Esta integral se hace por partes, tomando:

$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$; $dv = e^{5x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{5}e^{5x}$

Luego:

$$f(x) = \int 2xe^{5x}dx = 2x\cdot\frac{1}{5}e^{5x} - \int 2\cdot\frac{1}{5}e^{5x}dx = \frac{2}{5}\left(xe^{5x} - \int e^{5x}dx\right) = \frac{2}{5}\left(xe^{5x}-\frac{1}{5}e^{5x}\right)+c$$

Como $f(0) = 2$, entonces: $f(0) = \frac{2}{5}\left(0-\frac{1}{5}e^0\right)+c = 2 \Rightarrow c = 2+\frac{2}{25} = \frac{52}{25}$.

Por tanto, $f(x) = \frac{2}{5}\left(xe^{5x}-\frac{1}{5}e^{5x}\right)+\frac{52}{25}$.

b) La función pedida debe ser una primitiva de $(x-1)^3(x-3)$; esto es:

$$f(x)=\int (x-1)^3(x-3)dx$$

Operando:

$$(x-1)^3(x-3) = \left(x^3-3x^2+3x-1\right)\cdot(x-3)=x^4-6x^3+12x^2-10x+3$$

Luego:

$$f(x)=\int \left(x^4-6x^3+12x^2-10x+3\right)dx=\frac{1}{5}x^5-\frac{6}{4}x^4+4x^3-5x^2+3x+c$$

Como $f(0)=1 \Rightarrow c = 1$; y, por tanto: $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{3}{2}x^4+4x^3-5x^2+3x+1$.