Tema 5. Ecuaciones de rectas y planos en el espacio (Posiciones relativas)

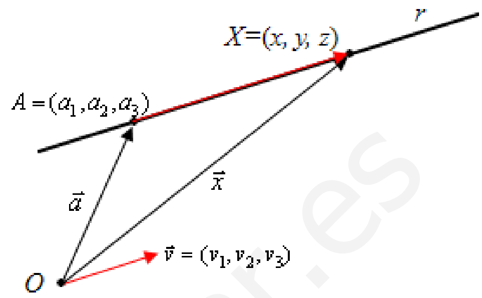
1. Ecuaciones de una recta en el espacio

1. 1. Recta definida por un punto y un vector

Una recta queda definida dando uno de sus puntos y su vector de dirección

Si el punto es $A=(a_1,a_2,a_3)$, que lleva asociado el vector $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$; y su vector de dirección es $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, cualquier otro punto $X\in r$ cumple:

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}.$$



Como el vector $\overrightarrow{AX}=\lambda\vec{v}$, la **ecuación vectorial** de la recta es: $\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{v}$

Designando $X = (x, y, z)$, sustituyendo y operando, se obtienen las **ecuaciones paramétricas** de la recta, que son:

$$r:\begin{cases} x=a_1+\lambda v_1 \\ y=a_2+\lambda v_2 \\ z=a_3+\lambda v_3 \end{cases}.$$

→ λ es un parámetro (un número real); puede ser designado por cualquier otra letra: t, h…
Los distintos puntos de la recta se obtienen dando valores a λ.
Un punto genérico de r puede denotarse así: $X=(a_1+\lambda v_1, a_2+\lambda v_2, a_3+\lambda v_3)$

Despejando λ en cada una de las ecuaciones paramétricas e igualando, se obtiene la **ecuación de la recta en forma continua**:

$$r:\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}.$$

Ejemplo:
Las ecuaciones de la recta que contiene (pasa por) el punto $A(3, –1, 2)$ y lleva la dirección del vector $\vec{v}=(–1, 4, 5)$ son:
Vectorial: $r:(x,y,z)=(3,-1,2)+\lambda(-1,4,5)$

Paramétricas: $r:\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=-1+4\lambda \\ z=2+5\lambda \end{cases}$ Continua: $r:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-2}{5}$

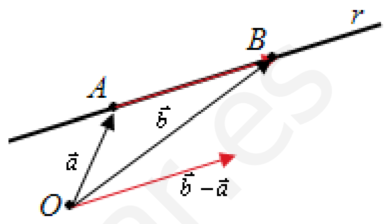
→ Para $\lambda = 1$ y $\lambda = –2$ se obtienen los puntos $P(2, 3, 7)$ y $Q(5, –9, –8)$ de r.
→ Los puntos genéricos de esta recta son: $X=(3-\lambda, -1+4\lambda, 2+5\lambda)$.

Observaciones:
1) Cuando una de las coordenadas del vector de dirección es 0 (sucedería si en ejemplo anterior $\vec{v}=(–1, 0, 5)$), puede escribirse la expresión $r:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-2}{5}$, cuyo significado es: $r:\begin{cases} \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{z-2}{5} \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow r:\begin{cases} 5(x-3)=-(z-2) \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow r:\begin{cases} 5x+z-17=0 \\ y+1=0 \end{cases}$.

La última expresión, en la que aparecen dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, es otra forma de dar una recta. Se verá más adelante que cada una de esas ecuaciones designa un plano.
2) Para denotar una recta (o un plano) suele utilizarse una letra minúscula y dos puntos o tres rayas $\to$ $r:$ o $r \equiv$; y para un plano, $\pi:$ o $\pi \equiv$.

1.2. Recta definida por dos puntos

<u>Una recta queda definida por dos puntos</u>.
Si los puntos son $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ es evidente que:
Uno de los puntos determina la posición, por ejemplo *A*;
mientras que el vector $\vec{b} - \vec{a}$ (o $\vec{a} - \vec{b}$) indica su dirección.
Por tanto, su ecuación vectorial será: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$.
A partir de ella se obtienen las ecuaciones alternativas. Así, la ecuación continua será:



$$r: \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3}$$

Ejemplo:
La recta que pasa por los puntos *A*(1, 2, 3) y *B*(2, 2, 1), es la que pasa por el punto *A* y lleva la dirección del vector ***AB*** = (2, 2, 1) – (1, 2, 3) = (1, 0, –2).
Por tanto:
Su <u>ecuación vectorial</u> es: $r: (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 0, -2)$

Y sus <u>ecuaciones paramétricas</u> son: $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.

- **Condición de pertenencia de un punto a una recta**

Un punto pertenece a una recta cuando cumple su ecuación (sus ecuaciones). Esto implica que sus coordenadas se obtienen para un valor único del parámetro.

Ejemplo:

El punto (–2, –2, 6) es de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$, pues al sustituir en sus ecuaciones *x* por –2,

y por –2 y *z* por 6: $\begin{cases} -2 = 1 + 3t \\ -2 = -1 + t \\ 6 = 2 - 4t \end{cases}$, se obtiene que *t* = –1 en las tres igualdades.

En cambio, el punto (4, 1, –2) no es de esa recta, pues al sustituir en sus ecuaciones se obtiene el “sistema” $\begin{cases} 4 = 1 + 3t \\ 1 = -1 + t \\ -2 = 2 - 4t \end{cases}$, que es incompatible: la solución *t* = 1 vale para la primera y tercera ecuación, pero no para la segunda.

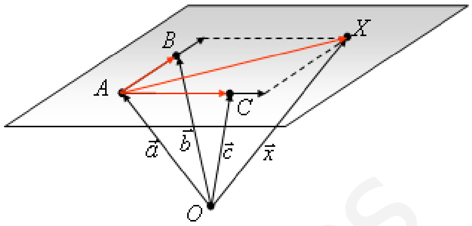
2. Ecuaciones de un plano

2.1. Plano determinado por tres puntos

Un plano queda definido por tres de sus puntos (no alineados).

Si las coordenadas de esos puntos son $A=(a_1,a_2,a_3)$, $B=(b_1,b_2,b_3)$ y $C=(c_1,c_2,c_3)$, la **ecuación vectorial** del plano es:

π: $\vec{x}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})+\mu(\vec{c}-\vec{a})$,



que se obtiene observando que si $X=(x, y, z)\in\pi$, entonces:

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\mu\cdot\overrightarrow{AC}$$

Sus **ecuaciones paramétricas** son:

$$\pi\equiv\begin{cases}x=a_1+\lambda(b_1-a_1)+\mu(c_1-a_1)\\ y=a_2+\lambda(b_2-a_2)+\mu(c_2-a_2)\\ z=a_3+\lambda(b_3-a_3)+\mu(c_3-a_3)\end{cases}\Leftrightarrow\pi\equiv\begin{cases}x=a_1+\lambda u_1+\mu v_1\\ y=a_2+\lambda u_2+\mu v_2\\ z=a_3+\lambda u_3+\mu v_3\end{cases}.$$

→ λ y μ son los parámetros (números reales indeterminados); pueden sustituirse por cualquier otro par de letras: t y h; p y q…

Los distintos puntos del plano se obtienen dando valores a λ y μ.

Un punto genérico del plano π puede denotarse así:

$$X=\left(a_1+\lambda u_1+\mu v_1,\, a_2+\lambda u_2+\mu v_2,\, a_3+\lambda u_3+\mu v_3\right)$$

Si se "eliminan" los parámetros se obtiene la **ecuación general** (cartesiana o implícita) del plano:

$$\begin{vmatrix}x-a_1 & u_1 & v_1\\ y-a_2 & u_2 & v_2\\ z-a_3 & u_3 & v_3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\pi\equiv ax+by+cz+d=0.$$

Observaciones:

1) Como se ha puesto de manifiesto más arriba, $\overrightarrow{AX}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\mu\cdot\overrightarrow{AC}$; esto es, $\overrightarrow{AX}$ depende linealmente de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. En consecuencia, el determinante asociado vale 0.

2) El plano no varía si en la expresión inicial se cambia el punto A por cualquiera de los otros dos dados.

3) De la ecuación implícita se puede pasar a las paramétricas despejando cualquiera de las variables y designado las otras dos por λ y μ. (Se verá en el siguiente ejemplo).

Ejemplo:

Las ecuaciones del plano que contiene a los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, 1)$ y $C(0, 5, 3)$ son:

Vectorial: $\pi\equiv(x, y, z)=(1, 2, 1)+t\cdot(1, 1, 0)+h\cdot(-1, 3, 2)$.

Los vectores son: $\overrightarrow{AB}=(2, 3, 1)-(1, 2, 1)=(1, 1, 0)$; $\overrightarrow{AC}=(0, 5, 3)-(1, 2, 1)=(-1, 3, 2)$.

Paramétricas: $\pi\equiv\begin{cases}x=1+t-h\\ y=2+t+3h\\ z=1\quad\;\;+2h\end{cases}.$

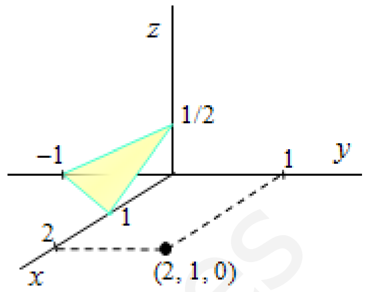
→ Para $\lambda=1$ y $\mu=-1$, por ejemplo, se obtienen el punto $P(3, 0, -1)$ del plano.

→ Los puntos genéricos de este plano son: $X=(1+t-h, 2+t+3h, 1+2h)$.

<u>Implícita</u>:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & 1 & 3 \\ z-1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv (x-1)\cdot 2-(y-2)\cdot 2+(z-1)\cdot 4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2x-2y+4z-2=0 \Rightarrow \pi \equiv x-y+2z-1=0$$



→ Dando valores a x, y y z que cumplan la ecuación (cosa que se puede hacer por tanteo) se obtienen puntos del plano. Así, los puntos (1, 0, 0), (0, –1, 0) o (0, 0, 1/2) son del plano; en concreto, estos puntos son los de corte del plano con los ejes coordenados. Otro punto puede ser (2, 1, 0).

→ Despejando x en la ecuación $x-y+2z-1=0 \Rightarrow x=1+y-2z$, y haciendo $y = \lambda$ y $z = \mu$

se obtienen otras ecuaciones paramétricas de π: $\begin{cases} x=1+\lambda-2\mu \\ y=\quad \lambda \\ z=\qquad \mu \end{cases}$.

Como puede observarse, estas ecuaciones no coinciden con las dadas inicialmente, pero el plano es el mismo; simplemente se ha cambiado la referencia. (Puede comprobarse que a partir de estas ecuaciones paramétricas se llega a la misma ecuación implícita.)

- **Condición de pertenencia de un punto a un plano**

Un punto pertenece a un plano cuando cumple su ecuación: las coordenadas del punto verifican la ecuación del plano.

Ejemplos:

a) El punto $P(3, -2, 6)$ pertenece al plano $\pi \equiv x+4y+2z-7=0$, pues sustituyendo:

$3 + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 6 - 7 = 0$.

El punto $Q(1, 4, -2)$ no pertenece a ese plano, ya que $1 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) - 7 = 6 \neq 0$.

b) Para que el punto $R(-1, 3, 4)$ pertenezca al plano $\pi \equiv x-y+2z+d=0$ es necesario que se cumpla: $-1 - 3 + 2 \cdot 4 + d = 0 \Rightarrow d = -4$.

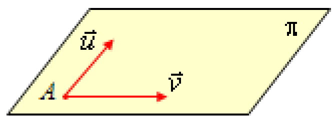
2.2. Plano determinado por un punto y dos vectores

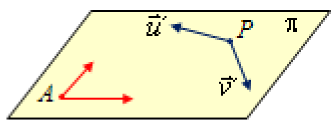
<u>Un plano queda determinado por un punto y dos vectores linealmente independientes.</u>

Es una consecuencia inmediata de lo visto anteriormente.

Si el punto es $A=(a_1,a_2,a_3)$ y los vectores $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, el plano será:

$$\pi \equiv \vec{a}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$$





→ El mismo plano puede venir determinado por distintas parejas de vectores y por un punto diferente. Así, en el ejemplo anterior, el plano viene determinado por el punto $A(1, 2, 1)$ y los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = \vec{v} = (-1, 3, 2)$; pero también está determinado por el punto $P(1, 0, 0)$ y los vectores $\vec{u}' = (1, 1, 0)$ y $\vec{v}' = (-2, 0, 1)$.

Ejemplo:
El plano determinado por el punto $A(2, –1, 3)$ y por los vectores $\vec{u}$ = (1, –2, 3) y $\vec{v}$ = (6, 0, 1) es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + t + 6h \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 3t + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 6 \\ y+1 & -2 & 0 \\ z-3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -2x + 17y + 12z - 15 = 0 .$$

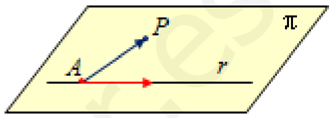
2.3. Otras formas de determinar un plano

- <u>Un plano queda determinado por una recta y un punto no perteneciente a ella</u>.

Si el punto es P y la recta $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$, la ecuación del plano será:

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v} + \mu\overrightarrow{AP} .$$

Es obvio que también vale $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{v} + \mu\overrightarrow{AP}$.



Ejemplo:
La ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-4}$ y al punto P = (0, 1, 2) viene determinada por el punto $A(1, –1, 0)$, o por P, y por los vectores $\vec{v}_r$ = (2, 1, –4) y **AP** = (0, 1, 2) – (1, –1, 0) = (–1, 2, 2).

Su ecuación es: $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t - h \\ y = -1 + t + 2h \\ z = -4t + 2h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+1 & 1 & 2 \\ z & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to \pi\text{: } 2x + z - 2 = 0 .$

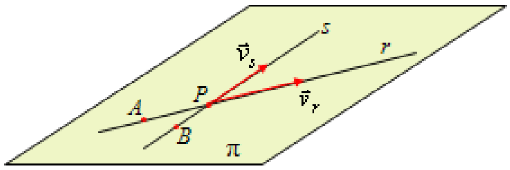
- <u>Un plano queda definido por dos rectas que se cortan</u>.

Si las ecuaciones de las rectas son:

$$r \equiv \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v}_r \text{ y } s \equiv \vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}_s ,$$

la ecuación del plano que determinan es:

$$\pi \equiv \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v}_r + \mu\vec{v}_s .$$



Es evidente que dicho plano contiene a las dos rectas que se cortan.

<u>Observación</u>: Dos rectas se cortan cuando tienen un punto en común; en consecuencia, el sistema determinado por las ecuaciones de ambas rectas debe ser compatible determinado. El punto A puede sustituirse por el punto de corte P, o por el punto B de la recta s.

Ejemplo:
La ecuación del plano que contiene a las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + h \\ y = -1 + 2h \\ z = 2 - 3h \end{cases}$, que, como se observa de manera evidente, tienen en común el punto $A = B = P(1, –1, 2)$, queda determinado por ese punto y por los vectores $\vec{v}_r$ = (2, 1, –1) y $\vec{v}_s$ = (1, 2, –3).

Su ecuación es: $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t - h \\ y = -1 + t + 2h \\ z = 2 - t - 3h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+1 & 1 & 2 \\ z-2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \to \pi\text{: } x - 7y - 5z + 2 = 0 .$

Observación:
Una manera de ver si dos rectas se cortan es resolver el sistema que determinan. Si ese sistema es compatible determinado, las rectas se cortarán; siendo su solución las coordenadas del punto de corte. (Si el sistema es incompatible las rectas no se cortan.

Ejemplos:

a) Para ver si las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = h \\ y = -3 + 2h \\ z = 5 - 3h \end{cases}$ se cortan, puede formarse el

sistema: $\begin{cases} x_r = x_s \\ y_r = y_s \\ z_r = z_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 2t = h \\ 1 + t = -3 + 2h \\ -t = 5 - 3h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t - h = -5 \\ t - 2h = -4 \\ -t + 3h = 5 \end{cases} \Rightarrow t = -2,\ h = 1.$

El punto de corte será $P(1, -1, 2)$.

b) En cambio, las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = -3 + h \\ z = 5 - 3h \end{cases}$ no se cortan, pues el sistema:

$\begin{cases} x_r = x_s \\ y_r = y_s \\ z_r = z_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 2t = 1 + 2h \\ 1 + t = -3 + h \\ -t = 5 - 3h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t - 2h = -4 \\ t - h = -4 \\ -t + 3h = 5 \end{cases}$ es incompatible.

- Un plano queda definido por dos rectas paralelas.

Si las ecuaciones de las rectas son:

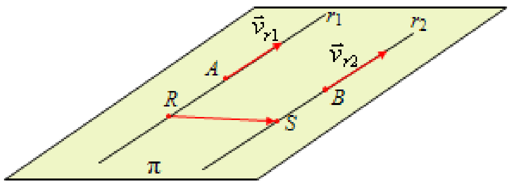
$r_1 \equiv \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v}_{r1}$ y $r_2 \equiv \vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{v}_{r2}$

la ecuación del plano que determinan es:

$\pi \equiv \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v}_{r1} + \mu \overrightarrow{RS}$

siendo $R \in r$ y $S \in s$.

El vector ***RS*** puede sustituirse por ***AB***.



Observación: Dos rectas con paralelas cuando lo son sus vectores de dirección; cuando $\vec{v}_{r1} = k\vec{v}_{r2}$.

Ejemplo:

Las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2h \\ y = -2 + h \\ z = 3 - h \end{cases}$, que son paralelas por tener el mismo vector de dirección, definen un plano que viene determinado por el punto A (1, –1, 2) de r, y por los vectores $\vec{v}_r$ = (2, 1, –1) y ***AB*** = (0, –2, 3) – (1, –1, 2) = (–1, –1, 1).

Su ecuación es: $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t - h \\ y = -1 + t - h \\ z = 2 - t + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+1 & 1 & -1 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to \pi\text{: } y + z - 1 = 0$

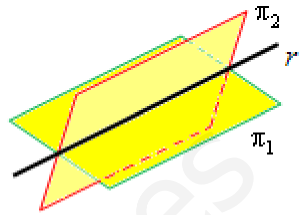
<u>Observación final: Dos planos que se cortan definen una recta</u>

A partir de la ecuación de una recta en su forma continua, $r: \dfrac{x-a_1}{v_1} = \dfrac{y-a_2}{v_2} = \dfrac{z-a_3}{v_3}$,

igualando las razones dos a dos se tiene:

$$\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} \text{ y } \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3} \to \text{También } \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{z-a_3}{v_3}$$

Operando en esas igualdades se obtiene:



$$\begin{cases} v_2(x-a_1) = v_1(y-a_2) \\ v_3(y-a_2) = v_2(z-a_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 : v_2x - v_1y - v_2a_1 + v_1a_2 = 0 \\ \pi_2 : v_3y - v_2z - v_3a_2 + v_2a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 : ax + by \qquad + d = 0 \\ \pi_2 : \qquad b'y + cz' + d' = 0 \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones obtenidas determina un plano: son ecuaciones lineales de la forma $ax + by + cz + d = 0$.

Los puntos comunes de esos planos son los de la recta.

Ejemplo:

Si la recta es $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2y+2 \\ -4y-4 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-3=0 \\ 4y+z+4=0 \end{cases}$.

Estas ecuaciones se obtienen de la pareja de igualdades:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} \text{ y } \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-4}.$$

→ Recíprocamente, <u>una recta queda determinada por dos planos que se cortan</u>.

Su ecuación viene dada por la solución del sistema (compatible indeterminado) que forman las ecuaciones de los respectivos planos.

Ejemplo:

Si los planos son $\pi_1 \equiv x - y + 2z - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + 2 = 0$, la recta que determinan es:

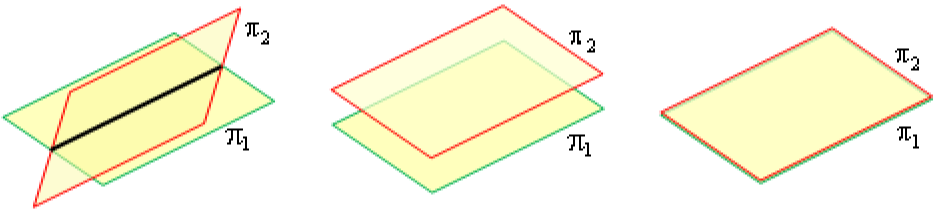
$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x - y = 1 - 2z \\ 2x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -4 + 4t \\ z = \qquad t \end{cases}.$$

Un punto de esta recta es $A(-3, -4, 0)$; su vector de dirección es $\vec{v}_r = (2, 4, 1)$.

3. Posiciones relativas de planos en el espacio

3.1. Posiciones relativas de dos planos

Dos planos en el espacio pueden cortarse (determinando una recta), ser paralelos o ser coincidentes.



La forma más inmediata de determinar la posición de dos planos en el espacio es estudiar el sistema que determinan, que es: $\begin{cases} \pi_1 : ax + by + cz = d \\ \pi_2 : a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$

Este sistema nunca puede ser compatible determinado: tiene 3 incógnitas y sólo 2 ecuaciones.

- Si el sistema es incompatible, los planos son paralelos.
- Si el sistema es compatible indeterminado con un grado de indeterminación (rango de (A) = rango de (M) = 2), los planos se cortan en una recta. La ecuación de esa recta viene dada por la solución del sistema. Por tanto, una recta queda determinada por dos planos que se cortan.
- Si el sistema es compatible indeterminado con dos grados de indeterminación, los planos son coincidentes. En este caso, rango de (A) = rango de (M) = 1.

Ejemplos:

a) Los planos $\begin{cases} \pi_1 : x + y + 1 = 0 \\ \pi_2 : 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ se cortan, pues las matrices de coeficientes y ampliada,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) = M$$, tienen rango 2.

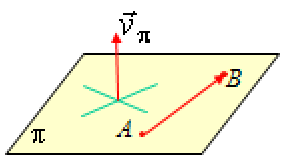
La recta que determinan se puede obtener despejando y y z en función de x.

Queda: $r \equiv \begin{cases} \pi_1 : x + y + 1 = 0 \\ \pi_2 : 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} y = -1 - x \\ z = 3 + 2x \end{cases} \rightarrow$ (haciendo $x = t$) $\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

b) Los planos $\begin{cases} \pi_1 : x + y - 3z = 1 \\ \pi_2 : 2x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$ son paralelos. Las matrices: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right) = M$, tienen distinto rango: 1, la primera; 2, las segunda.

c) Los planos $\begin{cases} \pi_1 : x + y - 3z = 1 \\ \pi_2 : 2x + 2y - 6z = 2 \end{cases}$ son el mismo. Basta con observar que la segunda ecuación es el doble de la primera.

- **Propiedad: vector normal a un plano**



Dado el plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$, el vector $\vec{v}_\pi = (a, b, c)$, cuyas componentes son los coeficientes de las variables, es perpendicular al plano.

El vector $\vec{v}_\pi$ se llama vector característico; otras veces se denomina vector normal a π.

Para demostrarlo hay que comprobar que si A y B son puntos cualesquiera del plano π, los vectores ***AB*** y $\vec{v}_\pi$ son perpendiculares.

En efecto, si $A(x_0, y_0, z_0)$ y $B(x_1, y_1, z_1)$ son puntos del plano, se cumple que:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 = -d \text{ y}$$

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \Rightarrow ax_1 + by_1 + cz_1 = -d$$

Por otra parte, $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$;

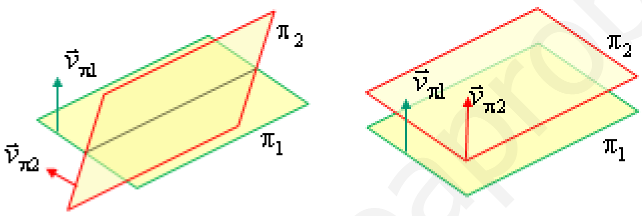
Luego, $\vec{v}_\pi \cdot \overrightarrow{AB} = (a, b, c) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) =$

$= ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0) = -d - (-d) = 0$.

En consecuencia, los vectores ***AB*** y $\vec{v}_\pi$ son perpendiculares.

→ Por tanto, partiendo de los vectores característicos de ambos planos puede estudiarse su posición relativa, pues se cumple:

- si $\vec{v}_{\pi 1}$ y $\vec{v}_{\pi 2}$ son independientes, los planos se cortan;
- si $\vec{v}_{\pi 1}$ y $\vec{v}_{\pi 2}$ son dependientes ($\vec{v}_{\pi 1} = k\vec{v}_{\pi 2}$), los planos serán paralelos o coincidentes.

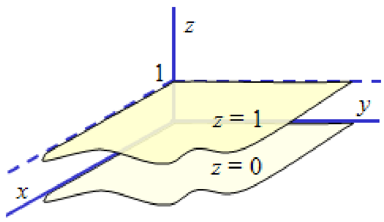


En general, los planos $\begin{cases} \pi_1 : ax + by + cz + d = \\ \pi_2 : ax + by + cz + d´ = 0 \end{cases}$ son paralelos: se diferencian en el término independiente.

Ejemplos:

a) Dados los planos $\begin{cases} \pi_1 : x + 2y - z = 2 \\ \pi_2 : 2x - z = 1 \end{cases}$, sus vectores característicos son $\vec{v}_{\pi 1}$ = (1, 2, –1) y $\vec{v}_{\pi 2}$ = (2, 0, –1). Como dichos vectores son independientes, los planos dados se cortan en una recta.

b) Los planos z = 0 y z = 1 son paralelos. Su vector normal es el mismo: $\vec{v}_\pi$ = (0, 0, 1). (Se corresponden con los niveles 0 y 1, respectivamente, del triedro de representación cartesiano).



→ La propiedad anterior posibilita que <u>un plano pueda determinarse dando un vector normal a él y uno de sus puntos</u>. Igualmente, permitirá determinar un plano perpendicular a una recta dada; y viceversa, determinar una recta que sea perpendicular a un plano dado. En ambos casos, el vector de dirección de la recta coincide con el vector característico del plano.

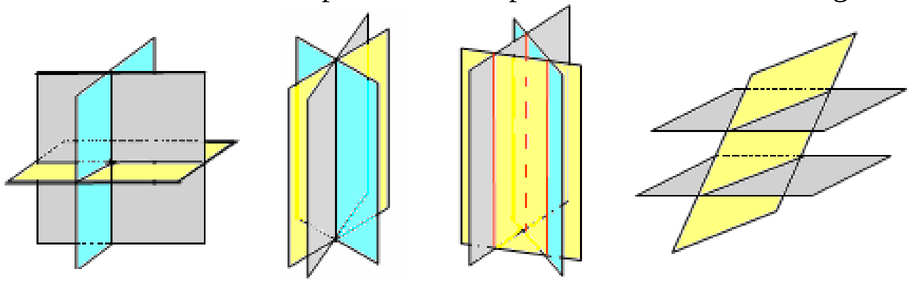
Ejemplo:

Los planos cuyo vector normal es $\vec{v}_\pi$ = (2, –1, 3) tienen por ecuación $\pi : 2x - y + 3z + d = 0$.

Cada uno de esos planos queda totalmente determinado dando uno de sus puntos. Así, el plano que contiene al punto P(1, 0, 5) debe cumplir que $2 \cdot 1 - 0 + 3 \cdot 5 + d = 0 \Rightarrow d = -17$. Por tanto, el plano será $\pi : 2x - y + 3z - 17 = 0$.

3.2. Posiciones relativas de tres planos

Algunas posiciones relativas de tres planos en el espacio se observan en la figura siguiente.



La forma más inmediata de determinar la posición de tres planos en el espacio es estudiar el sistema que determinan, que es: $\begin{cases} \pi_1 : ax + by + cz = d \\ \pi_2 : a'x + b'y + c'z = d' \\ \pi_3 : a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$.

- Si el sistema es compatible determinado, los tres planos se cortan en un único punto, cuyas coordenadas vienen dadas por la solución del sistema.
- Si el sistema es CI con un grado de indeterminación, los tres planos se cortan en una recta. La ecuación de esa recta viene dada por la solución del sistema. En este caso se dice que los tres planos son del mismo haz (de planos).
- Si el sistema es CI con dos grados de indeterminación, los tres planos son coincidentes.
- Si el sistema es incompatible, los tres planos no tienen ningún punto en común. En este caso rango de (A) < rango de (M). Pueden darse varias posibilidades:

1) Los planos se cortan dos a dos (dejan entre ellos un prisma triangular) → rango de (A) = 2, rango de (M) = 3, los coeficientes de cada plano dependen de los coeficientes de los otros dos.
2) Dos de los planos son paralelos → rango de (A) = 2, rango de (M) = 3, los coeficientes de un plano dependen sólo de los de los de otro plano.
3) Los tres planos son paralelos → rango de (A) = 1, rango de (M) = 2.

Ejemplos:

a) Los planos $\begin{cases} \pi_1 : x + y - z = 0 \\ \pi_2 : 2x + y = 4 \\ \pi_3 : x - y + 2z = 5 \end{cases}$ tienen un único punto en común, pues el sistema asociado es compatible determinado (comprobar). Dicho punto es $P(1, 2, 3)$, que es la solución del sistema.

b) Los planos $\begin{cases} \pi_1 : x + y - z = 0 \\ \pi_2 : 2x + y = 3 \\ \pi_3 : 3x + 2y - z = 3 \end{cases}$ tienen una recta en común, pues el sistema asociado es compatible indeterminado (puede observarse que la tercera ecuación es suma de las dos primeras). La recta que determinan es la solución del sistema, que es: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

c) Los planos $\begin{cases} \pi_1 : x + y - z = 0 \\ \pi_2 : 2x + y = 3 \\ \pi_3 : 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$ no tienen ningún punto en común. El sistema asociado es incompatible (compruébese). Los planos se cortan dos a dos: ningún plano es paralelos a otro.

d) Los planos $\begin{cases} \pi_1 : x + y - z = 0 \\ \pi_2 : 2x + y = 3 \\ \pi_3 : -x - y + z = 4 \end{cases}$ no tienen ningún punto en común. El sistema asociado es incompatible (compruébese). Dos de los planos son paralelos: π_1 y π_3.

e) Los planos $\begin{cases} \pi_1 : x + y - z = 0 \\ \pi_2 : 2x + 2y - 2z = 3 \\ \pi_3 : -x - y + z = 4 \end{cases}$ no tienen ningún punto en común. El sistema asociado es incompatible (compruébese). Los tres planos son paralelos.

Observación: Es frecuente plantear un sistema de ecuaciones con un parámetro en un contexto geométrico. Como muestra puede verse el siguiente ejercicio.

Ejercicio. Estudia, en función del parámetro *a*, la posición de los planos:

$\pi_1 : x + ay + z = 1 \quad \pi_2 : 2x + y - z = 1 \quad \pi_3 : 3x + y + az = 2$

Solución:

La solución se encuentra estudiando el sistema correspondiente: $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + y + az = 2 \end{cases}$.

Si *A* es la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada se tiene:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & a & 2 \end{array}\right) = M \to |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 - 2a = -2a(a+1).$$

El determinante de *A* vale 0 cuando $a = 0$ o $a = -1$.

Con esto:

- Si $a \neq 0$ y $-1 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado. En este caso los tres planos se cortarán en un único punto.

- Si $a = 0$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) = M$

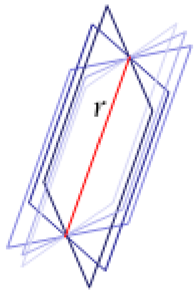
Como $F3 = F1 + F2 \Rightarrow$ r(*A*) = r(*M*) = 2. El sistema será compatible indeterminado. Los tres planos se cortan en una recta.

- Si $a = -1$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = M$

El rango de *A* es 2; mientras que el rango de *M* vale 3, pues $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. En este caso, el sistema es incompatible. Por tanto, los planos no tiene ningún punto en común: se cortan dos a dos.

- **Haz de planos determinado por una recta**

Es el conjunto de todos los planos que contienen a esa recta.



Si los planos $\begin{cases} \pi_1 : ax + by + cz + d = 0 \\ \pi_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ se cortan en una recta, la ecuación de cualquier otro plano que contenga a esa recta será una combinación lineal de las dos ecuaciones: $\pi \equiv k_1\pi_1 + k_2\pi_2$.

Por tanto, la expresión de la ecuación del haz de planos será:

$$k_1(ax + by + cz + d) + k_2(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

Si $k_1 = 0$ resulta el plano π_2; si $k_2 = 0$ resulta el plano π_1. Si $k_1 \neq 0$, dividiendo por dicho valor y llamando k a k_2/k_1, se obtiene una ecuación más cómoda para el haz de planos, que es: $(ax + by + cz + d) + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0$.

Observaciones:

1) Si al dar la ecuación de cualquiera de los planos el término independiente estuviese a la derecha del signo igual, habría que transponerlo a la izquierda.

2) Si la recta viene dada en cualquiera de sus otras formas (en lugar de definida por los dos planos), para determinar el haz de planos que la contienen, habría que obtener dos de esos planos. Se consigue despejando el parámetro en cada una de sus ecuaciones paramétricas e igualándolas dos a dos.

Ejemplos:

a) Los planos $\begin{cases} \pi_1 : x - 2y + z = -1 \\ \pi_2 : 2x - 3z - 5 = 0 \end{cases}$ determinan el haz de ecuación:

$(x - 2y + z + 1) + k(2x - 3z - 5) = 0 \rightarrow$ (En π_1 el término independiente se ha traspuesto).

b) Para determinar el haz de planos que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases}$, puede procederse como sigue:

1) Se despeja el parámetro t en cualquiera de las ecuaciones; aquí $t = -z$.

2) Se lleva ese valor de t a las otras dos ecuaciones.

Se tiene: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = 3 - z \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$.

Por tanto, el haz de planos determinado por r es: $(x - 2z - 1) + k(y + z - 3) = 0$

4. Posiciones relativas de un plano y una recta

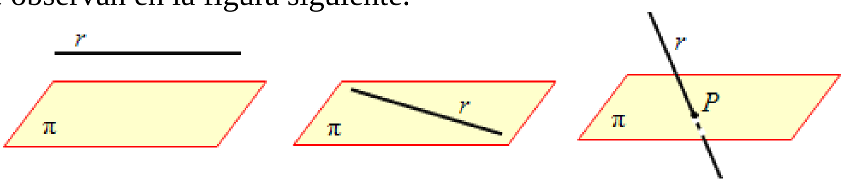
Las posibles posiciones relativas de una recta y un plano son tres:

1) La recta es paralela al plano;

2) La recta está contenida en el plano;

3) La recta atraviesa (corta) al plano.

Son las que se observan en la figura siguiente.



4.1. Posiciones relativas de un plano y una recta: solución algebraica

La manera más inmediata de determinar cada una de estas posiciones es estudiar el sistema asociado, que es: $\begin{cases} r:\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases} \\ \pi: a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$.

- Si el sistema es incompatible, la recta es paralela al plano.
- Si el sistema es compatible indeterminado, la recta está contenida en el plano.
- Si el sistema es compatible determinado, la recta corta (atraviesa) al plano. El punto de corte de una recta y un plano es la solución del sistema.

La resolución de ese sistema es sencilla cuando la recta viene dada en forma paramétrica, pues basta sustituir las ecuaciones de la recta en la del plano:

- Si se obtiene una contradicción (por ejemplo, 0 = 3), la recta es paralela al plano.
- Si se obtiene una identidad (la igualdad 0 = 0), la recta está contenida en el plano.
- Si se obtiene una ecuación con incógnita el parámetro, la recta corta (atraviesa) al plano. El punto de corte se halla sustituyendo el valor del parámetro en las ecuaciones de la recta.

Ejemplos:

a) Para determinar la posición de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -2+3\lambda \\ z = 4 \end{cases}$ respecto del plano $\pi \equiv x+y+z-5=0$, se sustituyen las ecuaciones de la recta en la del plano:

$$\pi \equiv (1-\lambda)+(-2+3\lambda)+4-5=0 \Rightarrow 2\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Por tanto, la recta corta al plano. El punto de corte es $P(0, 1, 4)$, obtenido al hacer en r $\lambda = 1$.

b) Para la misma recta, pero con el plano $\pi' \equiv 3x+y+z-5=0$, al sustituir las ecuaciones de la recta en la del plano se obtiene $\pi' \equiv 3(1-\lambda)+(-2+3\lambda)+4-5=0 \Rightarrow 0=0$.

Esto indica que la recta está contenida en el plano: todos los puntos de la recta cumplen la ecuación del plano.

c) Continuando con la misma recta pero cambiando el plano por $\pi'' \equiv 3x+y+2z+1=0$, al sustituir se tiene:

$$\pi'' \equiv 3(1-\lambda)+(-2+3\lambda)+2\cdot 4+1=0 \Rightarrow 10 = 0,$$ que obviamente es absurdo.

Esto significa que ningún punto de la recta cumple la ecuación del plano: son paralelos.

Observación: Es frecuente plantear esta cuestión de manera que sea necesario estudiar un sistema de ecuaciones con un parámetro, pero en clave geométrica. Como muestra puede plantearse el siguiente ejercicio.

Ejercicio. Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+az=0 \\ ay-z=4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+y+z-2=0$.

Halla los valores de a para los que r es paralela a π.

Solución:

Para que la recta sea paralela al plano es necesario que el sistema recta/plano sea incompatible

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x-y+az=0 \\ ay-z=4 \end{cases} \\ \pi: x+y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+az=0 \\ ay-z=4 \\ x+y+z=2 \end{cases}.$$

Para ello, el rango de la matriz de coeficientes debe ser menor que el de la matriz ampliada.

Las matrices son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & a & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = M$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & a & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a + 1 + 1 - a^2 = -a^2 + a + 2 = -(a+1)(a-2).$$

Este determinante vale 0 si $a = -1$ o $a = 2$.

Por tanto:

- Si $a \neq -1$ y $2 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado: la recta corta al plano.
- Si $a = -1$ se tendrá: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2, pues $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Como el menor de M, $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 4 = -10 \neq 0$, el rango de M es 3.

En este caso el sistema es incompatible. Luego, si $a = -1$ la recta es paralela al plano.

- Si $a = 2$ se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = M$

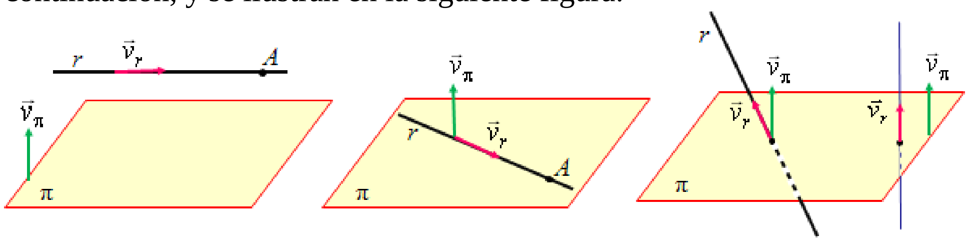
El rango de A es 2, pues $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Como el menor de M, $|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, el rango de M es 3.

En este caso el sistema vuelve a ser incompatible. Luego, si $a = 2$ la recta también es paralela al plano.

4.2. Posiciones relativas de un plano y una recta: solución vectorial

Con frecuencia, la determinación de la posición entre una recta y un plano es más rápida (y segura, pues requiere menos cálculos) si se aplican los procedimientos vectoriales que se indican a continuación, y se ilustran en la siguiente figura:



- La recta es paralela al plano $\to$ El vector de dirección de la recta es perpendicular al vector característico del plano. Por tanto, $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0$. Además, si $A \in r \Rightarrow A \notin \pi$.
- La recta está contenida en el plano $\to$ También $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0$. Además, si $A \in r \Rightarrow A \in \pi$.
- La recta corta al plano $\to$ Los vectores $\vec{v}_\pi$ y $\vec{v}_r$ no son perpendiculares. Por tanto, $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi \neq 0$. (Un caso particularmente interesante se da cuando la recta es perpendicular al plano: debe cumplirse que $\vec{v}_r = k\cdot\vec{v}_\pi$. Se estudiará más adelante.)

Ejemplos:

a) La recta la recta $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$ es paralela al plano $\pi: x - 3y - 2z - 5 = 0$, pues $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$ y $\vec{v}_\pi = (1, -3, -2)$ son perpendiculares: $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (1, 1, -1) \cdot (1, -3, -2) = 1 - 3 + 2 = 0$.
Además, el punto $A(2, 1, -1) \in r$ no cumple la ecuación del plano: $2 - 3 + 2 - 5 \neq 0$.

b) La recta $r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$ corta al plano $\pi: x - y + 2z - 5 = 0$ ya que $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi \neq 0$.
En efecto, $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (-1, 1, 2) \cdot (1, -1, 2) = -1 - 1 + 4 \neq 0$
Sustituyendo las ecuaciones de la recta en el plano: $2 - t - (1 + t) + 2\cdot 2t - 5 = 0 \Rightarrow t = 2$.
Para ese valor de t se obtiene $P(0, 3, 4)$, que es el punto de corte.
c) La recta anterior está contenida en el plano $\pi: x - 3y + 2z + 1 = 0$, pues se cumple:
$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (2, 1, 2) \cdot (1, -3, 2) = -1 - 3 + 4 = 0$
Y, además, el punto $A(2, 1, 0) \in r$ también cumple la ecuación del plano: $2 - 3 + 0 + 1 = 0$.

d) Si se plantea el **ejercicio** visto anteriormente:
$\to$ Se consideran la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$.
Halla los valores de a para los que r es paralela a π.
La solución puede darse como sigue:
1) Se expresa la recta en forma paramétrica:

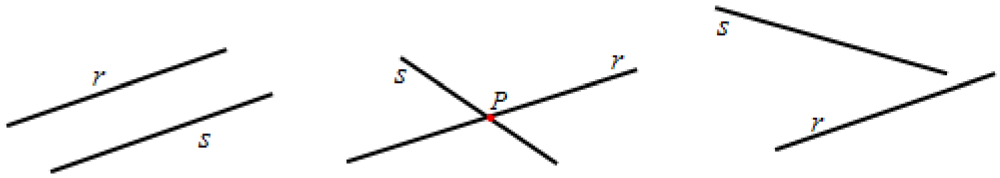
$$r \equiv \begin{cases} x - y + az = 0 \\ ay - z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4a + (1 - a^2)y \\ y = y \\ z = -4 + ay \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4a + (1 - a^2)\lambda \\ y = \lambda \\ z = -4a\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_r = (1 - a^2, 1, a)$$

2) Se impone que $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0$, para que ambos vectores sean perpendiculares.
Como $\vec{v}_\pi = (1, 1, 1) \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (1 - a^2, 1, a)\cdot(1, 1, 1) = -a^2 + a + 2 = -(a + 1)\cdot(a - 2)$.
Los vectores son perpendiculares cuando $a = -1$ o $a = 2$.
En esos casos, la recta o es paralela o está contenida en el plano.
–Si $a = -1$, el punto $(-4, 0, -4)$ es de la recta (se obtiene para $\lambda = 0$), pero no del plano.
–Si $a = 2$, el punto $(8, 0, -4)$ es de la recta (se obtiene para $\lambda = 0$), pero no del plano.
Por tanto, en ambos casos la recta es paralela al plano.
3) Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$ la recta corta al plano.

5. Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas en el espacio pueden ser paralelas, cortase o cruzarse, como se observa en la figura siguiente.



5.1. Posiciones relativas de dos rectas: solución algebraica

Las posiciones relativas de dos rectas pueden deducirse estudiando el sistema que determinan. Este sistema será de 4 ecuaciones lineales, si cada una de las rectas viene dada a partir de dos planos. Las incógnitas son *x*, *y*, *z*.

Así, si $r \equiv \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z = d_4 \end{cases}$, para determinar su posición habrá que estudiar la compatibilidad del sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z = d_4 \end{cases}$.

La discusión esquemática es:

- Sistema compatible determinado: rango de *A* = rango de *M* = 3 → Las rectas se cortan.
- Sistema compatible indeterminado: rango de *A* = rango de *M* = 2 → Las rectas coinciden.
- Sistema incompatible: rango de *A* = 3 y rango de *M* = 4 → Las rectas se cruzan.
- Sistema incompatible: rango de *A* = 2 y rango de *M* = 3 → Las rectas son paralelas.

Observación: Salvo en casos sencillos, que se dan cuando varios elementos de esas matrices sean nulos, este método puede resultar engorroso.

Ejemplo:

Para $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y + z = -1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$, el sistema correspondiente es $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y \quad = 3 \\ \quad y + z = -1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = M \to \text{(Gauss)} \to A = \begin{array}{c} \\ F2 - F1 \\ \\ F4 - 2F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) = M .$$

El determinante de la matriz ampliada, desarrollado por la primera columna, vale:

$$|M| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 1 + 2 \cdot (-2) = -14 \Rightarrow \text{El rango de } M \text{ es 4.}$$

Por tanto, el sistema es incompatible. Esto significa que las rectas se cruzan.

→ Otra solución de carácter algebraico, apropiada cuando las rectas vienen dadas en sus ecuaciones paramétricas, consiste en igualar las coordenadas genéricas de cada una de las rectas. Se obtiene así un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas (los parámetros), fácil de discutir.

El sistema en cuestión será: $\begin{cases} x_r = x_s \\ y_r = y_s \\ z_r = z_s \end{cases}$.

La discusión que se hace es:

- Sistema compatible determinado: la solución hallada a partir de dos ecuaciones, vale en la otra → Las rectas se cortan.
- Sistema incompatible: la solución hallada a partir de dos ecuaciones, no vale en la otra → Las rectas se cruzan.
- El paralelismo de ambas rectas se determina de manera evidente, comparando los vectores de dirección de las dos rectas, que deben ser proporcionales.
- Sistema compatible indeterminado → Las rectas coinciden: tienen vectores de dirección proporcionales y, además, cada punto de una pertenece a la otra.

Observación: Si el parámetro de las dos rectas viniese dado con la misma letra, habría que cambiar uno de ellos. Así, si ambos vienen dados por la letra λ, se cambia en una de las rectas λ por *t*.

Ejemplos:

a) Para estudiar la posición en el espacio de las rectas $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ se plantea el sistema: $x_r = x_s$; $y_r = y_s$; $z_r = z_s$.

Esto es:

$$\begin{cases} 1 + \lambda = t \\ -2 + 3\lambda = -2 + t \\ 2\lambda = 4 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ t = 3/2 \end{cases} \to \text{(Estos valores cumplen las 3 ecuaciones)}$$

El punto de corte es: $P(3/2, -1/2, 1)$. Se obtiene sustituyendo λ = 1/2 en *r*, o *t* = 3/2 en s.
(Puede verse que el plano que contiene a ambas rectas tiene por ecuación $4x - 2y + z - 8 = 0$.)

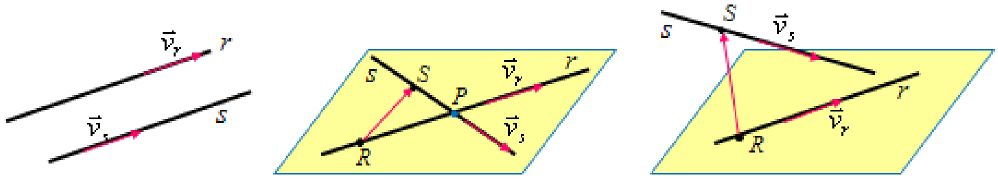
b) Si las rectas vienen dadas, una en forma paramétrica y la otra mediante dos planos. Por ejemplo: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$, resulta eficaz sustituir las ecuaciones de *r* en las de *s* y resolver el sistema obtenido.

Se obtiene: $s \equiv \begin{cases} (1 + t) + (2 - t) - 3t + 1 = 0 \\ 2(1 + t) - (2 - t) + 3t + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 3t = 0 \\ 2 + 6t = 0 \end{cases}$, que resulta incompatible.

Por tanto, las rectas se cruzan.

5.2. Posiciones relativas de dos rectas: solución geométrica

Se hace estudiando la relación de dependencia lineal de tres vectores: los de dirección de cada recta y cualquier vector determinado por dos puntos arbitrarios, uno de r y otro de s. Esto es: $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{RS}$, siendo $R \in r$ y $S \in s$.

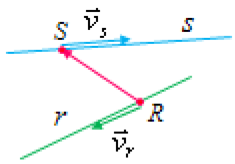


Obteniéndose:

- Rectas paralelas $\to$ los vectores de dirección son paralelos: $\vec{v}_r = k\cdot\vec{v}_s$.
- Si, además, $\vec{v}_r = \boldsymbol{RS}$ las rectas coinciden.
- Las rectas se cortan (son secantes) $\to$ los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{RS}$ son linealmente dependientes, pues los tres están en el mismo plano.
- Las rectas se cruzan $\to$ los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{RS}$ son linealmente independientes, pues los tres vectores no están en el mismo plano.

Ejemplos:

a) Las rectas $r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$ y $s: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = \quad\quad t \\ z = -4 - 2t \end{cases}$ se cruzan en el espacio, pues los vectores:

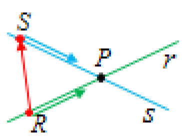


$\vec{v}_r = (2, 3, 2)$, $\vec{v}_s = (1, 1, –2)$ y $\boldsymbol{RS} = (–1, 0, –4) – (2, 1, 0) = (–3, –1, –4)$,

donde $R \in r$ y $S \in s$, son linealmente independientes, ya que $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$.

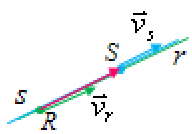
b) Las rectas $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \quad 2\lambda \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = \quad t \\ y = -2 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ se cortan en el espacio, pues los vectores:

$\vec{v}_r = (1, 3, 2)$, $\vec{v}_s = (1, 1, –2)$ y $\boldsymbol{RS} = (0, –2, 4) – (1, –2, 0) = (–1, 0, 4)$, son linealmente dependientes, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 + 2 = 0$.



c) Las rectas $r: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+a}{-2}$ y $s: \begin{cases} x = \quad 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ son paralelas para cualquier valor de a, pues tienen el mismo vector de dirección: $\vec{v}_r = \vec{v}_s = (2, 3, –2)$.

Además, como el vector $\boldsymbol{RS} = (0, –2, 1) – (2, 1, –a) = (–2, –3, 1 + a)$ tiene la misma dirección que $\vec{v}_r$ cuando $a = 1$, para ese valor de $a = 1$ ambas rectas coinciden.



6. Ejercicios finales

Ejercicio 1

a) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos (1, 2, 3), (2, 3, 1) y (3, 1, 2).
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1, 0, −1) y (1, −1, 0).
c) Determinad la posición relativa de la recta y el plano.

Solución:

a) El plano viene determinado por el punto (1, 2, 3) y por los vectores
(2, 3, 1) − (1, 2, 3) = (1, 1, −2); y (3, 1, 2) − (1, 2, 3) = (2, −1, −1)

Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & -1 \\ z-3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi \equiv -3(x-1)-3(y-2)-3(z-3)=0 \Leftrightarrow \pi \equiv x+y+z-6=0$$

b) La recta está definida por el punto (1, 0, −1) y el vector (1, −1, 0) − (1, 0, −1) = (0, −1, 1).

Su ecuación es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = -1+t \end{cases}$

c) Para determinar la posición relativa entre la recta y el plano pueden sustituirse las ecuaciones de la recta en la del plano, obteniéndose:

$$1-t-1+t-6=0 \Rightarrow -6=0$$

Como esa igualdad no tiene sentido, se concluye que la recta y el plano no se cortan. Esto es, que la recta es paralela al plano.

Ejercicio 2

Estudia la posición relativa entre la recta r y s de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 8 \\ z = 3+2t \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x-y+7=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$$

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de s son:

$$s: \begin{cases} x-y+7=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow s: \begin{cases} x = y-7 \\ y = 2z \end{cases} \rightarrow \text{haciendo } z=h \rightarrow s: \begin{cases} x = -7+2h \\ y = 2h \\ z = h \end{cases}.$$

Para determinar la posición relativa de ambas rectas hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$\vec{v}_r = (2, 0, 2)$, $\vec{v}_s = (2, 2, 1)$ y $\boldsymbol{PS} = (-7, 0, 0) - (0, 8, 3) = (-7, -8, -3)$

siendo P un punto de r y S = (−7, 0, 0) un punto de s.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 4-4=0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes.

En consecuencia, las rectas r y s se cortan.

Problemas propuestos

Ecuaciones de rectas y planos

1. Halla, en sus diferentes formas, las ecuaciones de la recta definida por el punto $A(2, -1, 1)$ y el vector $\vec{v} = (-1, 0, 2)$.
¿Pertenecen los puntos $P(3, -1, -1)$ y $Q(0, 2, 5)$ a la recta obtenida?

2. Halla las ecuaciones de la recta s que pasa por los puntos $A(1, 3, -4)$ y $B(3, -5, -2)$.

3. Halla la ecuación del plano determinado por los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 2, 2)$ y $C = (1, -1, 0)$.

4. Halla la ecuación del plano determinado por los puntos: $A(1, 3, 2)$, $B(2, 0, 1)$ y $C(1, 4, 3)$.
¿Pertenecen los puntos $P(-1, 2, -3)$ y $Q(0, 4, 3)$ al plano obtenido?

5. Calcula b para que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$ determinen un plano que contenga al punto $P(2, 0, 1)$. ¿Cuál es la ecuación de dicho plano?

6. Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-1, -1, 1)$ y tiene por vector normal a $\vec{v} = (1, -2, -1)$.
Halla otro punto P del plano y comprueba que el vector $\boldsymbol{AP}$ es perpendicular a $\vec{v}$.

7. Halla las ecuaciones del plano que contiene al punto $P(5, 0, -1)$ y a la recta $r: \begin{cases} x = \quad -\lambda \\ y = -4 \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$.

8. Halla la ecuación del plano que contiene al punto $P(1, 1, 1)$ y a la recta
$$r: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}.$$

9. Obtén las ecuaciones de las rectas que determinan los ejes cartesianos.

10. Obtén las ecuaciones de los planos cartesianos.

Otras formas de determinación de planos y rectas

11. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos de ecuaciones:
$$2x - 2y - z = 9 \quad \text{y} \quad 4x - y + z = 42$$
Indica uno de sus puntos y su vector de dirección.

12. (Propuesto en Selectividad en 2011, Aragón)
Halla la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:
$$r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2}, \quad s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$ y que pasa por el punto $A(1, 1, 2)$.

13. Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos $P(0, 1, 1)$ y Q (1, 0, 1) y es paralelo a la recta $r \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}$.

14. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P \equiv (3, -1, 4)$ y es paralelo a las rectas r_1 y r_2, de ecuaciones: $r_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = \quad -3t \end{cases}$; $r_2 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-3}$

15. Dada la recta la recta $r : \begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y el punto $A(1, 1, 1)$, calcula:
a) Un vector director de la recta r.
b) El plano π que contiene a la recta r y al punto A.

16. Halla la ecuación general del plano que contiene a la recta $r_1 : \frac{x-1}{2} = y = 2 - z$ y es paralelo a la recta $r_2 : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.

17. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, -1)$ y es paralela a
$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-1}$$
Halla también la ecuación del plano que contenga a ambas rectas.

<u>Otros problemas (I)</u>

18. Dibuja el triángulo de vértices los puntos $A(0, 2, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 0, 2)$. Halla la ecuación del plano que lo contiene.

19. (Propuesto en Selectividad en 2012, Castilla la Mancha)
Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas.

20. Sean A, B y C los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y + 2z - 4 = 0$ con los tres ejes coordenados OX, OY y OZ, respectivamente. Calcula:
a) El área del triángulo ABC.
b) El perímetro del triángulo ABC.
c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC.

21. Dados los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 0, 2)$ y la recta $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, halla un punto $C \in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en C.

Posiciones relativas de dos y tres planos

22. Halla la posición relativa de los pares de planos siguientes. Si se cortan, halla la ecuación de la recta que determinan.
a) $\pi \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ y $\alpha \equiv x - 3y - z = 0$.
b) $\pi \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ y $\alpha \equiv -2x - y + z - 2 = 0$.
c) $\pi \equiv x - 3y + 2z - 1 = 0$ y $\alpha \equiv 2x - 6y + 4z - 2 = 0$

23. Dados los planos de ecuación:
$$\pi_1 \equiv 2x + ky - z = 1 \text{ y } \pi_2 \equiv x - 3y - k^2 z = k$$
a) Estudia, en función del parámetro *k*, su posición relativa.
b) ¿Existe algún valor de *k* para el que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares?

24. Halla la posición relativa de los tres planos siguientes:
$\pi_1 \equiv 2x + y - z = 2$; $\pi_2 \equiv x + 2y - z = 3$; $\pi_3 \equiv x - 2y - z = -1$.
Si se cortan, halla el punto o la ecuación de la recta que determinan.

25. Halla la posición relativa de los tres planos siguientes:
$\pi_1 \equiv x + 10y - 5z = 11$; $\pi_2 \equiv x + 2y - z = 3$; $\pi_3 \equiv x - 2y + z = -1$.
Si se cortan, halla el punto o la ecuación de la recta que determinan.

26. Halla la posición relativa de los tres planos siguientes:
$\pi_1 \equiv 2x + 8y - 4z = 0$; $\pi_2 \equiv x + 2y - z = 3$; $\pi_3 \equiv x - 2y + z = 1$.
Si se cortan, halla el punto o la ecuación de la recta que determinan.

27. Halla la ecuación del haz de planos determinado por
$\pi : x - y + 2z - 5 = 0$ y $\pi' : 2x - y - 2z + 4 = 0$
De ellos, halla el plano que pasa por el punto *P*(0, –11, 4).

28. Halla la ecuación del plano definido por el punto *P*(–1, 2, 0) y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$.

29. Estudia, para los diferentes valores del parámetro *m*, la posición relativa de los planos:
$\pi_1 : mx - y + 3z = m$; $\pi_2 : 2x + 4z = 1$; $\pi_3 : x - y + 2z = -2$

30. Estudia, para los diferentes valores del parámetro *a*, la posición relativa de los planos:
$\pi_1 : x + y + 2z = 0$; $\pi_2 : x + ay + 3z = 1$; $\pi_3 : x + y + (2 - a)z = a$
Cuando sean del mismo haz, determina la recta común.

31. Halla, según los valores del parámetro *a*, la posición relativa de los planos dados por las ecuaciones: $\begin{cases} \pi_1 \equiv x + 2z = 0 \\ \pi_2 \equiv 3y + z = 0 \\ \pi_3 \equiv ax + z = 0 \end{cases}$.
Cuando sean del mismo haz, determina la recta común.

Posiciones relativas de una recta y un plano

32. Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = \ \ -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$.
En el caso de que se corten halla el punto común.

33. Sea *r* la recta que pasa por el punto *P*(1, −1, 1) y tiene como vector director (1, 2, −2). ¿Existe algún valor de *a* para el cual la recta *r* está contenida en el plano $2x + 3y + 4z = a$?

34. (Propuesto en Selectividad en 2012, Cataluña)
Dados el plano $\pi : x - y + 2z - 5 = 0$ y la recta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$.
a) Calcula el punto de intersección entre el plano y la recta.
b) Calcula la ecuación de la recta *s* que está contenida en el plano π, es perpendicular a la recta *r* y corta la recta *r*.

35. Dada la recta $r : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : 2x + y + mz - 3 = 0$, se pide:
a) La posición relativa de la recta *r* y el plano π según los valores del parámetro *m*.
b) El punto de intersección de la recta *r* y el plano π en el caso de *m* = 1.

Posiciones relativas de dos rectas

36. Determina la posición relativa entre las rectas: $r : \begin{cases} x = \ \ \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \ \ -\lambda \end{cases}$; $s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \ \ 2t \\ z = 0 \end{cases}$.

37. Dadas las rectas $r : \begin{cases} x = \ \ 3\lambda \\ y = a + 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -1 + 7t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$, determina su posición relativa dependiendo del valor de *a*.

38. Dadas las rectas $r : \dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-4}$ y $s : \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - y + z + 11 = 0 \end{cases}$.
a) Comprueba que son paralelas.
b) Halla la ecuación general del plano que las contiene.

39. Determina la posición de las rectas *r* y *s*, de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = -5 \end{cases} \ \text{y} \ s \equiv \begin{cases} x - y = -5 \\ z = 4 \end{cases}.$$

40. Determina la posición relativa de las rectas *r* y *s*, siendo *r* la recta que pasa por los puntos *P*(0, 8, 3) y *Q*(2, 8, 5) y $s:\begin{cases} x-y+7=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$. Si se cortan, halla el punto de corte.

41. (Propuesto en Selectividad en 2011, La Rioja)
La recta *r* de ecuación $\frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{3}$ y la recta *s* que pasa por los puntos *P*(1, 0, 2) y *Q*(*a*, 1, 0) se cortan en un punto. Calcula el valor de *a* y el punto de corte.

42. Demuestra que las rectas *r* y *s* se cruzan:

$$r:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{3}=z-2,\ s:\frac{x+1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-3}.$$

43 Estudia la posición relativa de las rectas $r:\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}$ y $s:\begin{cases} x=1+6\lambda \\ y=4\lambda \\ z=-4\lambda \end{cases}$.

Si determinan un plano, halla su ecuación.

44. Estudia en función de los valores del parámetro *a*, la posición relativa de las rectas *r* y *s*:

$$r\equiv\begin{cases} x-ay=2 \\ ay+z=1 \end{cases},\quad s\equiv\begin{cases} x-z=1 \\ y+z=3 \end{cases}.$$

Otros problemas (II)

45. Sea *r* la recta que pasa por los puntos *A*(1, 1, 1) y *B*(3, 1, 2); y $s\equiv\begin{cases} x-2z=1 \\ y-2=0 \end{cases}$.

Halla:
a) Su posición relativa.
b) Si se cortan, su punto de intersección.
c) Si existe, el plano que las contenga.

46. (Propuesto en Selectividad 2012, Comunidad Valenciana)
Se dan las rectas $r_1\equiv\begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=\alpha \\ z=2-\alpha \end{cases}$ y $r_2\equiv\begin{cases} x=-1 \\ y=1+\beta \\ z=-1-2\beta \end{cases}$, siendo α y β parámetros reales. Calcula las coordenadas del punto de corte de r_1 y r_2.

47. a) Halla la ecuación general del plano que pasa por los puntos (1, 2, 3), (2, 3, 1) y (3, 1, 2)
b) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos (1, 0, –1) y (1, –1, 0).
c) Determina la posición relativa de la recta y el plano.

48. Halla la ecuación de la paralela a la recta $r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ que pasa por el punto (0, 1, 0).

49. Dadas las rectas de ecuaciones: $r \equiv \begin{cases} 2x - y = m \\ z + 2y = 3 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$.
¿Qué valor debe tomar *m* para que ambas rectas se corten?

50. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto *P*(1, 0, 0) y corta a las rectas
$r_1 \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$

51. (Propuesto en Selectividad en 2011, Madrid)
Halla el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas:
$r_1 \equiv x = y = z$, $r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

52. (Propuesto en Selectividad en 2012, UNED)
Halla *a* y *b* para que los tres planos $\pi_1 : x + 2y - z = 1$, $\pi_2 : 2x + y + az = 0$ y $\pi_3 : 3x + 3y - 2z = b$ contengan a una misma recta *r*. Determina unas ecuaciones paramétricas de *r*.

Soluciones

1. Continua: $r : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z-1}{2}$. *P*(3, –1, –1) ∈ *r*; *Q*(0, 2, 5) ∉ *r*.

2. $s \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z+4}{1}$.

3. π: $x - y + z - 2 = 0$.

4. $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$. *P*(–1, 2, –3) ∈ π; *Q*(0, 4, 3) ∉ π.

5. *b* = 3. $\pi : x + y - z - 1 = 0$.

6. $\pi : x - 2y - z = 0$. Con *P*(1, 0, 1) → ***AP*** = (2, 1, 0).

7. $\pi :\ 2x - y + 2z - 8 = 0$.

8. $2x - y + 2z - 3 = 0$

9. $r_{OX} : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. $r_{OY} : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. $r_{OZ} : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

10. $z = 0$; $y = 0$; $x = 0$.

11. $r : \begin{cases} x = p \\ y = -17 + 2p \\ z = 25 - 2p \end{cases}$ → *P*(0, –17, 25); $\vec{v}_r$ = (1, 2, –2).

12. $\pi \equiv 15x - 7y + 11z - 30 = 0$.

13. $\pi \equiv 2x + 2y - z - 1 = 0$

14. $\pi \equiv x + y + z - 6 = 0$

15. a) $\vec{v}_r$ = (1, 1, 1). b) $\pi : x - z = 0$.

16. $\pi : 3x - 5y + z - 5 = 0$.

17. $s \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$. $\pi : -3x + 2y - 2z - 3 = 0$.

18. $\pi : x + y + z - 2 = 0$

19. $\dfrac{9}{2}\sqrt{11}$ u².

20. a) $\sqrt{21}$ u². b) $\sqrt{17} + 3\sqrt{5}$. c) $\hat{A}$ = 29,81º; $\hat{B}$ = 83,77º; $\hat{C}$ = 66,42º.

21. *C* = (1, 3/2, 3/2); *C* = (1, 0, 0).

22. a) $r:\begin{cases} x=-1-4t \\ y=\quad t \\ z=-1-7t \end{cases}$. b) Paralelos. c) Coinciden.

23. a) Se cortan para cualquier valor de *k*. b) *k* = 1 o *k* = 2.

24. Se cortan en el punto de coordenadas (0, 1, –1).

25. Los tres planos tienen una recta en común: $r\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=\quad t \\ z=-2+2t \end{cases}$.

26. Los tres planos no tienen ningún punto en común, se cortan dos a dos.

27. $x-y+2z-5+k(2x-y-2z+4)=0$; $-3x+y+6z-13=0$

28. $-y-z+2=0$.

29. Si $m\neq\frac{3}{2}$, tienen un único punto en común. Si $m=\frac{3}{2}$, los planos se cortan dos a dos.

30. Si $a\neq 0$ y 1, se cortan en un único punto. Si *a* = 0, se cortan en una recta. Si *a* = 1, se cortan dos a dos.

31. Si $a\neq 1/2$, $r(A)=3$, un único punto. Si *a* = 1/2, son del mismo haz → $r\equiv\begin{cases} x=6t \\ y=t \\ z=-3t \end{cases}$.

32. *P*(–3, 0, 4).

33. *a* = 3.

34. a) *P*(4, −3, −1). b) $s\equiv\begin{cases} x=4+t \\ y=-3+7t \\ z=-1+3t \end{cases}$.

35. a) Si $m\neq 4$, se cortan. Si *m* = 4, la recta está contenida en el plano. b) (2, –1, 0).

36. Se cruzan.

37. Se cortan cuando $a=-\frac{1}{2}$. En los demás casos se cruzan.

38. a) $\vec{v}_r=-\vec{v}_s$. b) $\pi: 2x+y+2z+5=0$.

39. Se cruzan.

40. *M*(1, 8, 4).

41. *a* = 2. *C*(–1, –2, 6).

42. Cierto.

43. $y+z=0$.

44. Si $a\neq 0$ se cruzan. Si *a* = 0, se cortan.

45. a) Paralelas. b) No. c) $\pi\equiv -x+2y+2z-3=0$.

46. *P*(–1, –1, 3).

47. a) π: $x+y+z-6=0$. b) $r:\begin{cases} x=1 \\ y=\quad -t \\ z=-1+t \end{cases}$. c) La recta es paralela al plano.

48. $r':\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=\quad t \end{cases}$.

49. *m* = 1.

50. $r\equiv\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{3}$

51. 32 u^3.

52. *a* = –1 y *b* = 1. $r\equiv\begin{cases} x=-1+t \\ y=t \\ z=-2+3t \end{cases}$.