Tema 1. Matrices

1. Definición de matriz

Una matriz de dimensión $n \times m$ es un conjunto de números dispuestos en n filas y m columnas. Así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior también se puede denotar por $A = (a_{ij})_{n \times m}$

El elemento a_{ij} es el que ocupa la fila i y la columna j.

Los elementos de cada fila y columna deben estar asociados a alguna característica común del hecho que se representa.

Ejemplos:

a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ tiene dimensión 3 × 2: 3 filas; 2 columnas. El elemento $a_{21} = -3$.

b) Una tabla de datos puede considerarse una matriz. Así, los resúmenes numéricos de la cotización en bolsa forman una matriz.

Valor	Último	Cambio %	Cambio	Máx.	Mín.
ABERTIS	13,715	-0,04	-0,005	13,77	13,70
ACCIONA	39,950	+0,49	0,195	40,17	39,80
ACERINOX	7,307	-0,45	-0,033	7,35	7,31
ACS	19,525	+0,18	0,035	19,64	19,49

La tabla anterior, que corresponde a un extracto del IBEX35 del día 05/07/13, puede considerarse como una matriz 4 × 5. Cada fila está relacionada con una empresa; las columnas dan razón de lo que se indica arriba: Último = valor de la acción en ese momento; Cambio % = variación porcentual respecto del valor anterior;… El elemento a_{24} = 40,17 indica que la cotización máxima de ACCIONA, durante el periodo estudiado, ha sido de 40,17 €. (Muchos programas informáticos, permiten trabajar con matrices).

c) Una matriz puede asociarse a los coeficientes y términos independientes de un sistema de ecuaciones lineales. Así, el sistema que sigue puede escribirse matricialmente como se indica.

Sistema: $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 4x \quad + z = -2 \end{cases} \to$ Matriz asociada: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$.

Cada fila corresponde a una ecuación; cada columna indica los coeficientes de la misma incógnita. La cuarta columna es la de los términos independientes, que suele separarse de las demás trazando una raya vertical. Obsérvese que cuando falta una incógnita se pone un 0 como coeficiente.

1.1. Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y son iguales los elementos correspondientes.

Esto es: $A = B \Leftrightarrow A = (a_{ij})_{n\times m}$, $B = (b_{ij})_{n\times m}$ y $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i y para todo j.

Ejemplo:

Para que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & d \end{pmatrix}$ sean iguales es necesario que $a = 1$, $b = 0$, $x = 3$ y $d = -5$.

1.2. Matriz traspuesta y matriz opuesta

- La **matriz traspuesta** de una matriz A es la que se obtiene al cambiar las filas por las columnas. Se denota por A^t. Así, si $A = (a_{ij})_{n\times m}$, su traspuesta es $A^t = (a_{ji})_{m\times n}$.

Observación: Otras formas de designar la traspuesta de A son A' o $\overline{A}$.

- La **matriz opuesta** de una matriz A es la que se obtiene al cambiar de signo todos los elementos de la matriz A; se designa por $-A$. Si $A = (a_{ij})_{n\times m}$, su opuesta es $-A = (-a_{ij})_{n\times m}$.

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, su traspuesta es $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Su opuesta es $-A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Algunos tipos de matrices

- **Matriz cuadrada**. Una matriz se dice cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas. Las matrices cuadradas de dimensión $n \times n$ suelen describirse como matrices de orden n.

– En las matrices cuadradas se habla de **diagonal principal**, la que va de izquierda a derecha, y de **diagonal secundaria**, que va de derecha a izquierda.

La suma de los elementos de la diagonal principal se llama *traza*.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria   Diagonal principal

La traza de $A = 2 - 3 - 1 = -2$.

– Entre las **matrices rectangulares** (las que no son cuadradas) se puede hablar de **matriz fila**, la que tiene una sola fila, y de **matriz columna**, la que tiene una sola columna.

Ejemplos:

Matriz fila: $F = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Matriz columna: $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Observa que las matrices anteriores son traspuestas una de otra.

Las componentes (las coordenadas) de un vector suelen darse mediante una de estas matrices. Si se dan en forma de matriz fila, sus elementos suelen separarse por comas. Así: (a_1, a_2, a_3).

– Entre las matrices cuadradas puede hablarse de:

- **Matriz simétrica**. Una matriz A es simétrica cuando es igual a su traspuesta: $A = A^t$.
- **Matriz antisimétrica**. Una matriz A es antisimétrica cuando $A = -A^t$.

Ejemplos:

Simétrica: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$. Antisimétrica: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Matriz triangular**. Una matriz se dice triangular cuando todos los elementos situados por encima (o por debajo) de su diagonal principal son ceros.

Ejemplos:

Triangular superior: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Triangular inferior: $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Matriz diagonal.** Una matriz se llama diagonal cuando son nulos (ceros) todos los elementos situados fuera de su diagonal principal.

Ejemplo:

Son diagonales las matrices $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $D' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriz escalar**. Una matriz se llama escalar cuando es diagonal y todos los elementos de su diagonal principal son iguales y no nulos.

Ejemplo:

Son escalares las matrices: $E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $E' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Matriz unidad.** Es una matriz escalar con todos los elementos de diagonal iguales a 1. La matriz unidad de orden 3 es la dada arriba; la identidad de orden 2 es $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Matriz nula**. Es la que todos sus elementos valen cero. La matriz nula de orden 2×3 es $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Operaciones con matrices: suma y producto por números

3.1. Suma de matrices

Si $A=(a_{ij})_{n\times m}$ y $B=(b_{ij})_{n\times m}$, su suma $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{n\times m}$

Observación: Para que dos matrices puedan sumarse deben tener la misma dimensión.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+5 & 3-2 \\ -1+4 & 7-9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

- **Propiedades de la suma de matrices**

La suma de matrices (para matrices sumables) cumple las propiedades usuales. Esto es:

Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$

Conmutativa: $A+B=B+A$

Matriz nula: O: $A+O=O+A=A$

Matriz opuesta: $-A$: $A+(-A)=O$.

La existencia de la matriz opuesta permite restar matrices, pues $A-B=A+(-B)$.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-5 & 3+2 \\ -1-4 & 7+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 16 \end{pmatrix}$.

3.2. Multiplicación de una matriz por un número

Si $A=(a_{ij})_{n\times m}$ y k es un número real, su producto $k\cdot A=(ka_{ij})_{n\times m}$

Ejemplo: $3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Propiedades**

El producto de una matriz por un número cumple las propiedades usuales. Esto es:

$k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$; $\quad (k+h)\cdot A=k\cdot A+h\cdot A$

$(k\cdot h)\cdot A=k\cdot(h\cdot A)$ $\quad 1\cdot A=A$

El símbolo · no es imprescindible. Esto es: $k\cdot A=kA$.

Observación: Que las operaciones descritas cumplan las propiedades anteriores, se resume diciendo que "el conjunto de matrices de dimensión $n\times m$, respecto de las operaciones suma y producto por escalares, tiene estructura de espacio vectorial".

Ejemplos:

a) $2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 12 & -27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -14 & 41 \end{pmatrix}$.

b) $2\left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Multiplicación de matrices

4.1. Producto de una matriz fila por una matriz columna

Si la matriz fila es $F_{1\times m}$ y la matriz columna, $C_{m\times 1}$, el resultado del producto es un número, que se obtiene al sumar los productos ordenados de los elementos de la fila por los de la columna. Esto es:

$$F_{1\times m}\cdot C_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1}.$$

Ejemplos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 - 2\cdot(-7) + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = 28$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix} = -3$

4.2. Producto de dos matrices

Si las matrices son $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ y $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times p}$, su producto es otra matriz $A\cdot B = \left(c_{ij}\right)_{n\times p}$.

El elemento c_{ij} de la matriz producto es el resultado de sumar los productos ordenados de los elementos de la fila *i* de la matriz *A* por los de la columna *j* de la matriz *B*. Esto es:

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$.

Observaciones:

1) Para multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera (la situada a la izquierda, matriz *A*) coincida con el número de filas de la segunda (la situada a la derecha, matriz *B*). Esto es: $A_{n\times m}\cdot B_{m\times p} = P_{n\times p}$.

2) En concreto, como se verá en el siguiente ejemplo: a) $A_{3\times 3}\cdot B_{3\times 2} = P_{3\times 2}$; b) $A_{1\times 3}\cdot B_{3\times 2} = P_{1\times 2}$; c) $A_{3\times 3}\cdot B_{3\times 1} = P_{3\times 1}$.

3) Continuando con la misma idea. Si el producto de una matriz de 4 columnas, $A_{n\times 4}$, por otra matriz de 2 columnas, $B_{m\times 2}$, es una matriz de cuadrada, $P_{p\times p}$, entonces, como $A_{n\times 4}\cdot B_{4\times 2} = P_{n\times 2}$, se tendrá que $n = p = 2$.

4) Insisto. Si el resultado de una matriz *A*, de dimensión desconocida, por otra matriz *B*, de dimensión 3 × 2, da una matriz *P* de dimensión 4 × 2, entonces, la dimensión de la primera matriz será 4 × 3. En efecto, debe cumplirse: $A_{n\times m}\cdot B_{3\times 2} = P_{4\times 2} \Rightarrow m = 3;\ n = 4$.

Ejemplos:

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \boxed{0 \quad -3 \quad 7} \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \boxed{5} & 4 \\ \boxed{-3} & 0 \\ \boxed{9} & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5 + 0\cdot(-3) + 1\cdot 9 & 2\cdot 4 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-7) \\ \boxed{0\cdot 5 + (-3)\cdot(-3) + 7\cdot 9} & 0\cdot 4 + (-3)\cdot 0 + 7\cdot(-7) \\ 1\cdot 5 + 7\cdot(-3) + (-1)\cdot 9 & 1\cdot 4 + 7\cdot 0 + (-1)\cdot(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ \boxed{72} & -49 \\ -25 & 11 \end{pmatrix}$$

b) Matriz fila $F_{1\times m}$ por $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times p}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 6 + 0 & 5 + 2 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 \end{pmatrix}$$

c) Matriz $A=(a_{ij})_{n\times m}$ por matriz columna $C_{m\times 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+0+12 \\ 9-16-12 \\ 15-0-30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ -19 \\ -15 \end{pmatrix}$$

- **Propiedades del producto de matrices**

El producto de matrices (para matrices multiplicables) cumple las siguientes propiedades:

Asociativa: $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

Distributiva: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

Elemento neutro: *I*: $A\cdot I=I\cdot A=A$

La dimensión de *I* dependerá de la de *A*, que debe ser cuadrada.

OJO. El producto de matrices no cumple, en general, las siguientes propiedades:

Conmutativa: $A\cdot B\neq B\cdot A$

Cancelativa: $A\cdot B=A\cdot C$ no implica necesariamente que $B = C$

Divisores de cero: $A\cdot B=O$ no implica necesariamente que $A = O$ ó $B = O$

Consecuencias:

1) Cuando se multiplican dos matrices no es independiente el orden de colocación de los factores; hay que indicar cuál de ellas va a la izquierda, por delante.

Un ERROR frecuente es admitir para dos matrices *A* y *B* que $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

También está MAL: $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ y $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

En los tres casos la justificación es la misma. Véase para $(A+B)^2$:

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=\ A\cdot A+A\cdot B+B\cdot A+B\cdot B=A^2+AB+BA+B^2\neq\ A^2+2AB+B^2$,

pues en general $A\cdot B\neq B\cdot A$.

2) En las ecuaciones matriciales no pueden simplificarse matrices. No existe la división de matrices. $\rightarrow$ La propiedad cancelativa es válida si *A* tiene inversa (ya se verá).

3) Si un producto de matrices da la matriz nula no puede deducirse que alguna de las matrices factores sea nula.

4) Los errores en el producto de matrices provienen de la identificación con el producto de números, pues, para a, $b\in\mathbf{R}$, sí es cierto que: $a\cdot b=b\cdot a$; y de $a\cdot b=a\cdot c$, con $a\neq 0$, se deduce que $b = c$; y lo mismo para las demás propiedades.

Ejemplos:

a) No conmutativa. La no conmutatividad es obvia cuando las matrices no pueden multiplicarse en distinto orden. Así, para $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, el producto

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 11 \\ 6 & -6 & 12 \end{pmatrix}$. En cambio, el producto BA no puede realizarse.

Tampoco se verifica la conmutatividad, aunque pueda realizarse el producto. Así, para las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$:

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$; mientras que $BA=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$.

b) No cancelativa. Para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, puede verse que $AB = AC$ y sin embargo, $B \neq C$.

En efecto: $AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -5 & 0\end{pmatrix}$; $AC=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -5 & 0\end{pmatrix}$

c) Divisores de cero. El producto $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, pero ninguna de las matrices factores es nula.

- **Profundizando en las propiedades**

1) Para ver que una propiedad no se cumple basta con comprobarlo para un caso. (Ese caso se llama contraejemplo).
2) Que una propiedad no se cumpla en general, no significa que no se cumpla nunca. En el caso de matrices son frecuentes los problemas en los que se pide determinar las características de una matriz para que sea conmutativa con otra dada; o para que cumpla otra propiedad no general.

Ejemplos:

a) Las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ verifican la propiedad conmutativa del producto, pues: $A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

b) A veces se plantean problemas como el que sigue: "Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ tales que $AB = BA$". (Da una de ellas que sea distinta de O).

La solución se encuentra así:

$$AB = BA \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 2a+b\\ c & 2c+d\end{pmatrix}$$

Por la igualdad de matrices, debe cumplirse que:

$$\begin{cases} a+2c=a \to c=0\\ b+2d=2a+b \to d=a\\ c=c\\ d=2c+d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=a\\ c=0\\ d=a\end{cases}$$

Observación: Al resolver este sistema aparecen ecuaciones de la forma $a = a$ o $d = a$, mientras que b desaparece. Estamos, pues, ante un sistema indeterminado, con infinitas soluciones. En este caso, con sólo dos condiciones: que $c = 0$; y que $d = a$. Como de b no se dice nada, su valor puede ser cualquiera.

Por tanto, las matrices buscadas son de la forma $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$, donde a y b son números cualesquiera. Una de ellas, haciendo $a = 2$ y $b = –3$, es $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

5. Potencia de una matriz cuadrada

La potenciación de matrices se justifica por su relación con procesos económicos, ecológicos, sociales... a largo plazo, en los que el mismo modelo se repite cada cierto tiempo.

5.1. Definición de potencia de una matriz

Es el concepto análogo a la potenciación numérica. Esto es:

$$A^2 = A\cdot A;\ A^3 = A^2\cdot A = A\cdot A\cdot A;\ \ldots\ A^n$$

Obtener la expresión de la potencia de una matriz es un proceso laborioso; naturalmente dependerá del tamaño de *A* y del exponente *n*. Algunas veces resulta asequible dar una expresión general para A^n.

Ejemplos:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ → Está MAL: $A^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix};\ A^4 = A\cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 80 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$$

En este caso es fácil ver que: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

b) Si *A* es una matriz diagonal, el cálculo de su potencia es muy sencillo. Así, si por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \text{ (Compruébalo).}$$

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} 16 & 48 \\ 80 & -16 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{pmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 256 \end{pmatrix}$

En este caso hay que distinguir entre potencias de exponente par o impar. Así:

Impar: $A^{2n-1} = \begin{pmatrix} 4^{2(n-1)} & 3\cdot 4^{2(n-1)} \\ 5\cdot 4^{2(n-1)} & -4^{2(n-1)} \end{pmatrix}$, $n \geq 1$.Par: $A^{2n} = \begin{pmatrix} 4^{2n} & 0 \\ 0 & 4^{2n} \end{pmatrix}$, $n \geq 1$

d) Si la matriz inicial no se elige con cuidado puede resultar muy complicado (o imposible) encontrar una fórmula para A^n. Así sucede para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, cuyas potencias sucesivas son: $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 16 & -5 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} -19 & -8 \\ -4 & -31 \end{pmatrix}$, ... (No parece sencillo dar una fórmula para A^n)

<u>Observación</u>: La certeza de que A^n tiene una determina expresión se fundamenta en el <u>método de demostración por inducción</u>, que básicamente consiste en demostrar que una propiedad es cierta para el siguiente de cualquier número natural *n*. Por tanto, si es cierta para 1, lo será para 2, y para 3, y *así sucesivamente*. El proceso de demostración es el siguiente:

1) Se hace una conjetura para la fórmula que se pretende demostrar. (Esa conjetura se realiza a partir de diversos ensayos).
2) Se comprueba que esa conjetura es cierta para $n = 1$. (De hecho, para hacer la conjetura ha debido comprobarse; incluso para $n = 2$ y $n = 3$, pues la conjetura debe hacerse sobre algunas pruebas).
3) Dar por cierto que la conjetura se cumple para cualquier valor de *n* y demostrar, que si es así, también se cumple para $n + 1$, para el siguiente.

Ejemplos:

a) Para la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ vista en el ejemplo a) de arriba.

– Ya se hizo la conjetura, que $A^n=\begin{pmatrix}1 & 3^n-1\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$, y comprobado su certeza para n = 1…

– Falta demostrar el paso 3): que dicha fórmula vale para el siguiente, para n + 1. Esto es, que

$$A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 3^{n+1}-1\\ 0 & 3^{n+1}\end{pmatrix}.$$

Se demuestra multiplicando:

$$A^{n+1}=A\cdot A^n=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3^n-1\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3^n-1+2\cdot 3^n\\ 0 & 3\cdot 3^n\end{pmatrix}\Rightarrow A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 3^{n+1}-1\\ 0 & 3^{n+1}\end{pmatrix}$$

b) Para la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, para establecer la conjetura se hacen algunas potencias de A:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}\qquad A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 9 & 1\end{pmatrix}$$

1) Si se supone que $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3n & 1\end{pmatrix}$ → (La conjetura se hace observando que en los casos vistos, A, A^2 y A^3, la diagonal principal está formada por unos, que el elemento a_{12} = 0 y que los elementos a_{21} son 3, 6, 9..., múltiplos sucesivos de 3).
2) Es obvio que se verifica para n = 1.
3) Para ver que se cumple para el siguiente de n, esto es, para n + 1, se hace el producto

$$A^{n+1}=A\cdot A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3n & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3+3n & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3(n+1) & 1\end{pmatrix}$$

En consecuencia la suposición es cierta y, por tanto, $A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3n & 1\end{pmatrix}$.

5.2. Potenciación y algunos tipos de matrices cuadradas

El comportamiento de una matriz cuadrada en relación con la potenciación permite catalogar algunos tipos de matrices. Algunas de ellas son:

- **Matriz involutiva**. Una matriz A se llama involutiva si $A^2=A\cdot A=I$.
- **Matriz idempotente**. Una matriz A se llama idempotente si $A^2=A\cdot A=A$.
- **Matriz nilpotente**. Una matriz A se llama nilpotente si $A\cdot A\cdot ...\cdot A=O$.
- **Matriz periódica.** Una matriz A se llama periódica de período p si $A^{p+1}=A$.

Ejemplos:

a) La matriz $A=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -8 & -7\end{pmatrix}$ es involutiva.

En efecto:

$$A^2=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -8 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 6\\ -8 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}49-48 & 42-42\\ -56+56 & -48+49\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

b) La matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -6\\ 2 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$ es idempotente, pues $A^2=A$, como se comprueba fácilmente.

$$A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -6\\ 2 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & -6\\ 2 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4-6 & -2-2+6 & 6+12-24\\ -2-2+6 & 4+1-6 & -12-6+24\\ -1-2+4 & 2+1-4 & -6-6+16\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -6\\ 2 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}=A$$

c) La matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$ es nilpotente, pues verifica que $A\cdot A\cdot A=A^3=O$.

(Compruébese).

d) La matriz $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ es periódica de periodo 3, pues cumple que $A^4=A$.

(Compruébese).

6. Algunas propiedades relacionadas con la matriz traspuesta

Dada la matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, su traspuesta es la matriz $A^t=\left(a_{ji}\right)_{m\times n}$.

La trasposición de matrices se comporta, respecto de las operaciones algebraicas, como sigue:

- Traspuesta de la matriz traspuesta: $\left(A^t\right)^t=A$
- Traspuesta de la suma de matrices: $(A+B)^t=A^t+B^t$
- Traspuesta de un número por una matriz: $(kA)^t=kA^t$
- Traspuesta de un producto de matrices: $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$, siendo $A_{n\times m}$ y $B_{m\times p}$
- **Matriz ortogonal**. La matriz A es ortogonal si $A\cdot A^t=I$.

Ejemplos:

a) Para $A=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ puede comprobarse que $(A+B)^t=A^t+B^t$.

En efecto:

$$A+B=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\to (A+B)^t=\begin{pmatrix}9 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Por otra parte:

$$A^t+B^t=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

b) Para $A=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ y $k=-2$ puede comprobarse que $(kA)^t=kA^t$.

En efecto:

$$-2A=-2\cdot\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 0\\ -2 & 6\end{pmatrix}\to(-2A)^t=\begin{pmatrix}-14 & -2\\ 0 & 6\end{pmatrix}.$$

Por otra parte:

$$-2\cdot A^t=-2\cdot\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 0\\ -2 & 6\end{pmatrix}.$$

c) Para $A=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix}$ puede comprobarse que $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$.

En efecto:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -7 & 21\\ 2 & -13 & 18\end{pmatrix}\to(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}14 & 2\\ -7 & -13\\ 21 & 18\end{pmatrix}.$$

Por otra parte:

$$B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\\ 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 2\\ -7 & -13\\ 15 & 18\end{pmatrix}.$$

d) La matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ es ortogonal, pues $A\cdot A^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

7. Álgebra de matrices (I)

Como ya se viene advirtiendo, el producto de matrices no verifica las propiedades acostumbradas; ello induce a la comisión de errores frecuentes al operar con matrices.
Para que el lector adquiera cierta destreza en estas operaciones se proponen en este apartado algunos ejercicios complementarios.

Ejercicio 1. Resolver ecuaciones en las que intervienen matrices

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x+1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ e I la identidad de orden 2.

a) Encuentra el valor o valores de x de forma que $B^2=A$.
b) Determina x para que $A\cdot B=I$.

Solución:

a) $B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\to B^2=A\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x+1\end{pmatrix}\Rightarrow x=1$.

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+1\\ x+1 & x+2\end{pmatrix}\to A\cdot B=I\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & x+1\\ x+1 & x+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow x=-1$

Ejercicio 2. Imponer que el producto sea conmutativo

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix}a & b\\ 2 & c\end{pmatrix}$, determina *a*, *b* y *c* para que *AP* = *PA*.

Solución:

Si se desea que *AP* = *PA*, entonces:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 2 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 2 & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+4 & b+2c\\ -2a+6 & -2b+3c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-2b & 2a+3b\\ 2-2c & 4+3c\end{pmatrix}$$

Igualando los elementos correspondientes:

$$\begin{cases}a+4=a-2b & \to b=-2\\ b+2c=2a+3b & \to c=a-2\\ -2a+6=2-2c & \\ -2b+3c=4+3c & \end{cases}\Rightarrow P=\begin{pmatrix}a & -2\\ 2 & a-2\end{pmatrix}\to \text{Una de ellas es: } P=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Resolver sistemas lineales de dos ecuaciones matriciales con dos incógnitas

Resuelve el siguiente sistema $\begin{cases}3X+2Y=A\\ 2X-3Y=B\end{cases}$, siendo $A=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -6\end{pmatrix}$, y *X* e *Y* matrices desconocidas.

Solución:

Aplicando el método de reducción para la resolución de sistemas:

$$\begin{cases}3X+2Y=A\\ 2X-3Y=B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}2E1\\ 3E2\end{matrix}\begin{cases}6X+4Y=2A\\ 6X-9Y=3B\end{cases}\Rightarrow \text{Restando: } 13Y=2A-3B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13Y=2\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -6\end{pmatrix}\Rightarrow 13Y=\begin{pmatrix}13 & 0\\ 13 & 26\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$3X+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow 3X=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Resolver otras ecuaciones no lineales

Halla todas las matrices *X* que satisfacen la ecuación $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Solución:

El producto de matrices exige que las dimensiones de las matrices que intervienen sean como se indican: $A_{n\times m}\cdot B_{m\times p}=P_{n\times p}$.

En este caso: $A_{2\times 2}\cdot X_{m\times p}=P_{2\times 3}\Rightarrow m=2$ y $p=3$.

Por tanto, la matriz *X* debe ser de dimensión 2 × 3. Si se supone que $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}d & e & f\\ 2d & 2e & 2f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}d=0\\ e=0\\ f=1\end{cases},$$

mientras que los valores de *a*, *b* y *c* pueden ser cualesquiera.

En consecuencia, las matrices *X* que satisfacen la ecuación dada son: $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Ejercicio 5. Comprobar la igualdad o falsedad de algunas expresiones
(Propuesto en selectividad, Cataluña 2006)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

a) Calcula $A\cdot B$ y $B\cdot A$. ¿Se cumple que $A\cdot B=B\cdot A$?

b) Comprueba que $(A+B)^2=A^2+B^2$.

Solución:

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ $\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

Es evidente que $A\cdot B\neq B\cdot A$.

b) Dado que $A\cdot B=-B\cdot A$ y que $(A+B)^2=A^2+A\cdot B+B\cdot A+B^2 = A^2-B\cdot A+B\cdot A+B^2 \Rightarrow$
$(A+B)^2=A^2+B^2$.

También puede verse multiplicando.

Ejercicio 6. Aplicar algunas regularidades para abreviar cálculos

Comprueba que la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ es periódica de periodo 3. Esto es, que verifica la igualdad $A^4=A$. Utilizando ese resultado, calcula A^{14}, A^{231}, A^{232} y A^{233}.

Solución:

Multiplicando, se tiene que:

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I \Rightarrow A\cdot A^3=A\cdot I \Leftrightarrow A^4=A.$$

Luego, efectivamente es periódica de periodo 3.

Como $A^3=I \Rightarrow A^{12}=\left(A^3\right)^4=I^4=I$.

Por tanto:

$$A^{13}=A^{12}\cdot A=I\cdot A=A \Rightarrow \quad A^{14}=A^{12}\cdot A^2=I\cdot A^2=A^2.$$

En general, puede observarse que las potencias de exponente un múltiplo de 3:

$$A^{3n}=\left(A^3\right)^n=I^n=I$$

Por tanto: $A^{3n+1}=A^{3n}\cdot A=I\cdot A=A$; $A^{3n+2}=A^2$.

Como $A^{231}=A^{3\cdot 77}$, $A^{232}=A^{3\cdot 77+1}$ y $A^{233}=A^{3\cdot 77+2}$, entonces:

$$A^{231}=I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ A^{232}=A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix};\ A^{233}=A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

8. Rango de una matriz

8.1. Definición de dependencia lineal entre filas de una matriz.

Cuando los elementos de una fila son proporcionales a los correspondientes de cualquier otra se dice que ambas filas son **linealmente dependientes**. Si, por ejemplo, esas filas son la primera y segunda, $F1$ y $F2$, entonces existirá un número $k \neq 0$ tal que $F2 = kF1$.
Dos filas son **linealmente independientes** cuando no hay relación de proporcionalidad entre sus elementos correspondientes; esto es, cuando una fila no puede obtenerse multiplicando la otra por un constante: $F_i \neq kF_j$.

- Si lo extendemos a tres filas, pongamos la primera, segunda y tercera, si existen dos números p y q, tales que $F3 = pF1 + qF2$, entonces la tercera fila depende linealmente de las dos primeras; en caso contrario son linealmente independientes.
- El mismo concepto puede definirse para las columnas de una matriz. Si existen dos números p y q, tales que $C3 = pC1 + qC2$, entonces la tercera columna depende linealmente de las otras dos. En caso contrario las columnas serán linealmente independientes.

Observación: En el tema de vectores (Tema 4) se definirán con mayor precisión los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores.

Ejemplos:
Para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puede observarse:

a) En la matriz A, la fila segunda es el triple de la primera: $F2 = 3F1$. Ambas filas son linealmente dependientes. (Puede observarse que $F2 = 3F1 \Leftrightarrow F1 = F1/3$).
b) En la matriz B se cumple que $F3 = F2 - F1$: la fila 3 depende de las dos primeras. (Puede observarse que $F3 = F2 - F1 \Leftrightarrow F2 = F1 + F3 \Leftrightarrow F1 = F2 - F3$).
c) En la matriz C se cumple que $C3 = -C1$: las columnas primera y tercera son linealmente dependientes. Además, $C4 = 2C1 + C2$: la columna cuarta depende de las dos primeras.
d) En la matriz D, las tres filas son linealmente independientes: ninguna fila o columna puede expresarse en función de las otras.

8.2. Rango de una matriz. ¿Cómo se calcula?

El rango de una matriz se define como el número de filas linealmente independientes que tiene dicha matriz. (Ese número coincide con el número de columnas linealmente independientes de esa misma matriz). Por tanto, para calcular su rango hay que ir eliminando (quitando) las filas o columnas que dependan de otras; las que queden linealmente independientes son las que determinan el rango.

Ejemplos:
Para las matrices del ejemplo anterior, y atendiendo a lo dicho allí, se tiene:

a) En la matriz A puede eliminarse la $F2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \cancel{3} & \cancel{-6} & \cancel{9} \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to$ quedan 2 filas independientes

$\Rightarrow$ rango de A = 2.

b) En la matriz B puede eliminarse la $F3$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 6\\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3}\end{pmatrix}$ $\to$ rango de B = 2.

c) En la matriz C pueden eliminarse las columnas $C3$ y $C4$, $C=\begin{pmatrix}1 & -3 & \cancel{-1} & \cancel{-1}\\ 2 & 1 & \cancel{-2} & \cancel{5}\\ -1 & 0 & \cancel{1} & \cancel{-2}\end{pmatrix}$ $\to$ rango de C = 2. ($C3$ se tacha porque depende de $C1$; $C4$, por ser $C4=2C1+C2$)

d) El rango de la matriz $D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 6\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ es 3, pues ninguna fila depende de otras.

Observación: El rango de una matriz es independiente de cómo se calcule, por filas o por columnas. Por tanto, el rango es como máximo igual al menor número que determina la dimensión de la matriz: el rango de $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ es menor o igual que el máximo de n y m. Así, para la matriz C de más arriba, que es de dimensión 3 × 4, su rango no puede ser mayor que 3. (Se ha visto que 2).

- **Transformaciones de Gauss**.

Las transformaciones de Gauss (Alemania, 1777–1855) son cambios que se realizan en la matriz para simplificarla y poder determinar su rango con facilidad, pues habitualmente las combinaciones lineales no se descubren de manera inmediata. El objetivo de este proceso es conseguir que aparezcan el mayor número de ceros entre los elementos de la matriz. Estas transformaciones no varían su rango, siendo algunas de ellas las siguientes:
1) Una matriz no cambia su rango si las filas (o columnas) cambian de orden.
2) Una matriz no cambia su rango si todos los elementos de una fila (o columna) se multiplican por un mismo número distinto de 0.
3) Una matriz no cambia su rango si a los elementos de una fila (o columna) se les suma o resta los elementos correspondientes de cualquier otra fila (o columna) multiplicados por cualquier número.

Al realizar estas transformaciones elementales, si se obtiene una fila de ceros, o dos filas iguales, o dos filas proporcionales, se suprime la fila nula o una de las dos proporcionales. Finalizado el proceso, el número de filas no nulas que queden en la matriz es el correspondiente a su rango.
Así, el rango de una matriz puede definirse también como el número de filas no nulas que tiene dicha matriz. (Una fila es nula cuando todos sus elementos son ceros).

Ejemplos:
Para las matrices del ejemplo anterior, pueden realizarse las transformaciones siguientes:

a) En la matriz A: 1) Restar a la segunda fila el triple de la primera; 2) Restar a la tercera fila el doble de la primera. Esto es: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & -6 & 9\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}\to A=\begin{array}{r}\\ F2-3F1\\ F3-2F1\end{array}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

Quedan 2 filas no nulas $\Rightarrow$ rango de A = 2. (Si se observa la proporcionalidad inicial no es necesario hacer las transformaciones. Bastaría con decir: se suprime $F2$, pues $F2=3F1$).

b) En la matriz *B*: 1) A *F*2 se le resta 2 · *F*1; 2) A *F*3 se le resta *F*1. Esto es:

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\to B=\begin{array}{r} \\ F2-2F1\\ F3-F1\end{array}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 0\\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{0}\end{pmatrix}\to \text{Queda } B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$ Su rango es 2.

c) En la matriz *C*: 1) La columna 2 se sustituye por $C2+3C1$; 2) *C*3 por $C3+C1$; 3) *C*4 por

$$C4+C1\to C=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 5\\ -1 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\to C=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cancel{0} & \cancel{0}\\ 2 & 7 & \cancel{0} & \cancel{7}\\ -1 & -3 & \cancel{0} & \cancel{-3}\end{pmatrix}\to \text{Queda } C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 7\\ -1 & -3\end{pmatrix}.$$

Su rango es 2.

d) En la matriz $D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 6\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ninguna de las transformaciones posibles genera una fila de ceros. Su rango es 3.

Observaciones:
1) Una buena estrategia consiste en "hacer" el máximo número de ceros en alguna fila o columna.
2) En el tema de determinantes se verá otra técnica para calcular el rango.

9. Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada *A* es inversible (o invertible) si existe otra matriz, de igual tamaño, que se denota por A^{-1} y se llama matriz inversa de *A*, tal que: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$, siendo *I* la matriz identidad del mismo tamaño que *A*.

Observación. No toda matriz tiene inversa. Para que una matriz tenga inversa es necesario que sea cuadrada y que su rango coincida con su orden.

Ejemplo:

La inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ es $A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Para comprobarlo basta con ver que $A\cdot A^{-1}=I$. En efecto: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

9.1. Cálculo de la matriz inversa

- **Método directo**

Consiste en partir de una matriz A^{-1} genérica e imponer que cumpla la condición de que sea la inversa de *A*; esto es, que $A\cdot A^{-1}=I$. Los pasos a seguir son:
1) Se escribe A^{-1} en función de tantas incógnitas como sea necesario: 4 si es una matriz de orden 2; 9 si es de orden 3;...
2) Se hace el producto $A\cdot A^{-1}$ y se iguala a la matriz *I* del mismo tamaño.
3) Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtienen los elementos de A^{-1}.

Ejemplo:

a) Si $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -4\end{pmatrix}$, se supone que $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Haciendo $A\cdot A^{-1}$ e igualando a $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ se tiene:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+5c & b+5d\\ -a-4c & -b-4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I\Rightarrow\begin{cases}a+5c=1\\ -a-4c=0\\ b+5d=0\\ -b-4d=1\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow a=-4,\ c=1;\ b=-5,\ d=1.$

Luego, la matriz inversa buscada es $A^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

En efecto: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$

Observación: Este método resulta demasiado engorroso para matrices de mayor tamaño.

- **Método de Gauss–Jordan**

El método de Gauss–Jordan (W. Jordan, Alemania, 1842–1899) para el cálculo de la matriz inversa consiste en la resolución esquemática del sistema de arriba. Para aplicar el método:

1) Se añade, a la derecha de la matriz *A*, la matriz identidad. Se forma así la matriz $(A|I)$.

2) Se transforma esa matriz ampliada, mediante sumas y restas de filas, hasta llegar a la matriz $(I|A^{-1})$. Esto es, la matriz obtenida a la derecha es la inversa buscada.

Para ello hay que conseguir sucesivamente que, en la matriz izquierda, inicialmente *A*, los valores de sus términos sean: $a_{11}=1$; $a_{21}=0$; $a_{22}=1$; $a_{12}=0$. Eso para matrices de tamaño 2 × 2. Para las de tamaño 3 × 3, hay que buscar, sucesivamente, que: $a_{11}=1$; $a_{21}=0$; $a_{31}=0$; $a_{22}=1$; $a_{32}=0$; $a_{33}=1$; $a_{23}=0$; $a_{13}=0$; $a_{12}=0$.

Observaciones:

1) Si en la matriz izquierda, la *A* inicial, se generase una fila de ceros, la matriz *A* no tendría inversa. Se termina el proceso.

2) Este método resulta demasiado engorroso para matrices de orden 3 y mayores, sobre todo si aparecen fracciones. Por eso, más adelante, en el tema siguiente, se verá otra técnica más eficaz para calcular la inversa de una matriz.

Ejemplo:

Observación: En los casos que siguen, *F*1, *F*2 y *F*3 indican las filas 1ª, 2ª o 3ª de la matriz precedente. (Así se hará siempre).

a) Para la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -4\end{pmatrix}$, se forma la matriz ampliada $(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 5 & 1 & 0\\ -1 & -4 & 0 & 1\end{array}\right)$.

Se hacen las siguientes transformaciones:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 5 & 1 & 0\\ -1 & -4 & 0 & 1\end{array}\right)\to\begin{array}{r}\\ F2+F1\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\to\begin{array}{r}F1-5F2\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -4 & -5\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)=(I|A^{-1})$$

La matriz inversa de *A* es $A^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

b) Para hallar la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ se puede proceder como sigue:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 5 & -4 & -4 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to \begin{array}{c}F2-F1\\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 5 & -4 & -4 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\to \begin{array}{c}\\ F2-5F1\\ F2+F1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 5 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\to \begin{array}{c}\\ \\ -F3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 5 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)\to$$

$$\to \begin{array}{c}F1+F3\\ F2-F3\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)\to \begin{array}{c}F1+F2\\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)\Rightarrow$$

La matriz inversa buscada es $A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

9.2. Algunas propiedades relacionadas con la matriz inversa

Las más usadas son:

1) Si la matriz A tiene inversa, su inversa es única.

2) Si una fila o una columna de la matriz A es nula, entonces A no es inversible.

3) Si A y B son invertibles y del mismo tamaño, entonces su producto también tiene inversa, y se cumple que: $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

4) Si A es inversible, entonces su traspuesta también lo es, y se cumple que: $\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t$.

Observación: Anteriormente se dijo que una matriz A es ortogonal si $A\cdot A^t=I$. Por tanto, si una matriz A es ortogonal se cumple que $A^{-1}=A^t$.

10. Álgebra de matrices (II)

Como ya se viene advirtiendo, el producto de matrices no verifica las propiedades acostumbradas; ello induce a la comisión de errores frecuentes al operar con matrices.

Tampoco puede hablarse de división de matrices. No existe el cociente $\frac{A}{B}$, ni siquiera debería escribirse; existen los productos $A\cdot B^{-1}$ y $B^{-1}\cdot A$, que no son iguales.

Para que el lector adquiera cierta destreza en estas operaciones se proponen en este apartado algunos ejercicios complementarios.

Ejercicio 1. Potencia de un producto

Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, ¿es cierto que $(A\cdot B)^2=A^2\cdot B^2$?

Solución:

Para que se verifique la igualdad $(AB)^2=A^2B^2$ es necesario que las matrices sean conmutables, que $AB = BA$, pues:

$(AB)^2=(AB)\cdot(AB)=A\cdot B\cdot A\cdot B=A\cdot\underline{(B\cdot A)}\cdot B$ = (si $AB = BA$) $=A\cdot\underline{(A\cdot B)}\cdot B=A\cdot A\cdot B\cdot B=A^2\cdot B^2$

Nuevamente se observa que el producto de matrices no cumplen las propiedades habituales.

Ejercicio 3. Ecuaciones matriciales
Despeja la matriz X en cada una de las siguientes ecuaciones:
a) $A\cdot X = B$ b) $X\cdot A = B$ c) $X\cdot A + X = B$ d) $A^{-1}\cdot X\cdot A = B$
Solución:
a) Hay que multiplicar ambos miembros, por la izquierda, por A^{-1}. Queda:
$$A\cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1}(A\cdot X) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)\cdot X = A^{-1}B \Rightarrow I\cdot X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

b) Hay que multiplicar ambos miembros, por la derecha, por A^{-1}. Queda:
$$X\cdot A = B \Leftrightarrow (X\cdot A)A^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow X\cdot(AA^{-1}) = BA^{-1} \Rightarrow X\cdot I = BA^{-1} \Rightarrow X = BA^{-1}$$

c) Primero se saca factor común; a continuación se multiplica por la inversa que proceda. Así:
$$X\cdot A + X = B \Leftrightarrow X\cdot A + X\cdot I = B \Rightarrow X(A+I) = B \Rightarrow X(A+I)(A+I)^{-1} = B(A+I)^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = B(A+I)^{-1}$$

d) Se multiplican ambos miembros, por la izquierda, por A; y por la derecha, por A^{-1}. Así:
$$A^{-1}\cdot X\cdot A = B \Leftrightarrow A(A^{-1}XA)A^{-1} = ABA^{-1} \Rightarrow (AA^{-1})X(AA^{-1}) = ABA^{-1} \Rightarrow X = ABA^{-1}$$

Ejercicio 2. Recurrencia (Propuesto en Selectividad 1997, en Madrid)
Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Utiliza la igualdad anterior para determinar la inversa de A y A^6.
Solución:
Por una parte: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.
Por otra: $2A - I = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.
Efectivamente $A^2 = 2A - I$.

Si $A^2 = 2A - I \Rightarrow I = 2A - A^2 \Rightarrow I = (2I - A)\cdot A$.
Por tanto, existe una matriz, $2I - A$, que multiplicada por A da la identidad. Esa matriz es la inversa de A: $A^{-1} = 2I - A$.
Luego, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
Comprobación: $A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
Cálculo de A^6:
De $A^2 = 2A - I \Rightarrow A^4 = (2A - I)\cdot(2A - I) = 4A^2 - 4A + I \Rightarrow$ (Se sustituye $A^2 = 2A - I$)
$$\Rightarrow A^4 = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$$
$$A^6 = A^2A^4 = (2A - I)\cdot(4A - 3I) = 8A^2 - 10A + 3I \Rightarrow \text{(Se sustituye } A^2 = 2A - I\text{)}$$
$$\Rightarrow A^6 = 8(2A - I) - 10A + 3I = 6A - 5I$$
Por tanto: $A^6 = 6\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Resolver ecuaciones matriciales
a) Despeja la matriz X en función de A e I en la ecuación $(X+A)^2 = X^2 + X\cdot A + I$, siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I la matriz identidad de orden dos.
b) Resuelve la ecuación $B\cdot X + B^2 = I$, si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:
a) Operando se tiene:

$$(X+A)^2 = X^2 + X\cdot A + I \Leftrightarrow X^2 + A\cdot X + X\cdot A + A^2 = X^2 + X\cdot A + I \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\cdot X + A^2 = I \Leftrightarrow A\cdot X = I - A^2 \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}(I - A^2) \Rightarrow X = A^{-1} - A$$

b) De $B\cdot X + B^2 = I \Rightarrow B\cdot X = I - B^2 \Rightarrow B^{-1}\cdot B\cdot X = B^{-1}(I - B^2) \Rightarrow X = B^{-1} - B$
Cálculo de la inversa;

$$(B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} \\ F2-F1 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{matrix} \\ -F2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to$$
$$\to \begin{matrix} F1-F2 \\ \\ \end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5. Resolver ecuaciones matriciales
a) Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, comprueba que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
b) Para esas matrices halla la matriz X, que es solución de la ecuación $BXA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:
a) Debe cumplirse que $A\cdot A^{-1} = I$ y $B\cdot B^{-1} = I$.
En efecto:

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\ ;\ B\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

b) Si $BXA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = B^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}A^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6. Una demostración
Demuestra que si A y B son matrices invertibles del mismo orden, entonces $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.
Solución:
Si X es la inversa de $A\cdot B$: $X = (A\cdot B)^{-1} \Rightarrow (A\cdot B)\cdot X = I \Rightarrow A\cdot B\cdot X = I \Rightarrow X = ? \to$
(Para despejar X se multiplica, primero por A^{-1} por la izquierda; y a continuación por B^{-1}, también por la izquierda).

$$\to A\cdot B\cdot X = I \Rightarrow \underline{A^{-1}}\cdot A\cdot B\cdot X = \underline{A^{-1}}\cdot I \Rightarrow B\cdot X = A^{-1} \Rightarrow \underline{B^{-1}}\cdot B\cdot X = \underline{B^{-1}}\cdot A^{-1} \Rightarrow X = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

Problemas propuestos

Operaciones con matrices

1. Dadas $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & -9\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-11 & 12\\ -14 & 41\end{pmatrix}$, halla dos números *a* y *b* para que se verifique que $a\cdot A+b\cdot B=C$.

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, halla otras dos matrices del mismo orden, *X* e *Y*, que cumplan: $\begin{cases}2X-Y=A\\ X+3Y=2B\end{cases}$.

3. (Propuesto en Selectividad 2011, Canarias)
Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$. Resuelve el sistema

$$\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X+4Y=B\end{cases}$$

4. Para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A+(B+C)=(A+B)+C$ b) $A(B+C)=AB+AC$
c) $(A-B)C=AC-BC$ d) $A(BC)=(AB)C$

5. Calcula, si es posible, los productos *AB* y *BA* para las matrices siguientes:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$ f) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -1\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$

6. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, halla los productos *AB* y *BA*. Además de que no se cumple la propiedad conmutativa, ¿qué otro comentario puede hacerse?

7. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, comprueba que $AB = AC$, y sin embargo, $B \neq C$.

8. Para la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}$, calcula el valor de a para que $A^2 - A=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}$.

Potencia de una matriz

9. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

a) Demuestra que $A^2 = 2A - I_2$.

b) Aplicando el apartado a) halla la matriz A^6.

10. a) Halla las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}$ que cumplen que $A^3 = A$.

b) Para esas matrices y para el valor $a = -2$, calcula $A^{10} + A^{11} + A^{12}$.

11. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, encuentra la expresión general de A^n. ¿Cuál es la matriz $A^{10} - 10A$?

12. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, encuentra la expresión general de A^n. ¿Cuál es la matriz $A^{10} - 10A$?

13. Halla la expresión general de A^n en los siguientes casos:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

14. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, comprueba que para todo n natural se cumple que

$A^{2n-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ n & 0 & 1\\ n-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $A^{2n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ n & 1 & 0\\ n & 0 & 1\end{pmatrix}$.

15. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, comprueba que para todo n natural se cumple que

$$A^{2n-1}=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1} & 0\\ 2^{n-1} & -2^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ y } A^{2n}=\begin{pmatrix}2^{n} & 0 & 0\\ 0 & 2^{n} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Comprobación de algunas propiedades

16. Halla los valores de a para los que la matriz $A=\begin{pmatrix}a & a+1 & -3\\ a^2-1 & 2 & 4a\\ -3 & a^2+4 & -1\end{pmatrix}$ es simétrica.

17. Halla el valor de a para que sea ortogonal la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 0 & a\\ a & 0 & -a\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

(Recuerda: Una matriz A es ortogonal si $A\cdot A^t=I$).

18. Demuestra que si las matrices A y B son ortogonales, entonces su producto también es ortogonal.

19. Demuestra que si P y Q son matrices cuadradas tales que $P\cdot Q=Q^2\cdot P$, entonces $(P\cdot Q)^2=Q^6\cdot P^2$.

20. Dada las matrices $A=(a_{ij})_{n\times m}$ y $B=(b_{ij})_{n\times m}$, demuestra las propiedades:

1) $(A^t)^t=A$ 2) $(A+B)^t=A^t+B^t$ 3) $(kA)^t=kA^t$

21. Comprueba las propiedades anteriores para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -5 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

22. Dada las matrices $A=(a_{ij})_{n\times m}$ y $B=(b_{rs})_{m\times p}$, demuestra la propiedad 4) $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

23. Comprueba la propiedad anterior para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -4 & -6 & 3\end{pmatrix}$.

24. (Propuesto en Selectividad 2006, Castilla y León)

Halla las matrices A cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad: $A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}A$.

Rango de una matriz

25. Utilizando transformaciones de Gauss halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

26. Determina, en función de los valores de *a*, el rango de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$

27. Determina, en función de los valores de *a*, *b* y *c*, el rango de la matriz

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$.

Inversa de una matriz

28. Halla por dos métodos distintos (directamente y aplicando el método de Gaus–Jordan) la inversa de cada una de las siguientes matrices, si existe.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

29. Aplicando el método de Gaus–Jordan halla, cuando exista la inversa de cada una de las siguientes matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

30. Calcula la matriz *A* que haga que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Halla la solución de dos maneras:

1) Sin calcular la matriz inversa; 2) Calculándola.

31. (Propuesto en Selectividad 1997, Madrid)

Calcula los valores del parámetro λ para que la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 5 & -\lambda \end{pmatrix}$ coincida con su opuesta.

Soluciones

1. $a = 2$; $b = 3$.

2. $X = \begin{pmatrix} 1 & -18/7 \\ 8/7 & -18/7 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & -22/7 \\ 2/7 & -8/7 \end{pmatrix}$.

3. $X = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $Y = \frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -9 & -1 & 9 \\ -2 & -7 & 2 \end{pmatrix}$.

5. a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. b) $AB = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ -16 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 22 & -10 \end{pmatrix}$.

c) $AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.d) $BA = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$. e) $AB = -11$; $BA = \begin{pmatrix} -8 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$.

f) $AB = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -14 \\ -2 & -8 & 15 \\ 5 & -14 & 6 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 13 & -9 & 5 \\ 27 & -10 & 1 \\ -19 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$. El producto de dos matrices no nulas da la matriz nula.

7. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$; $AC = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

8. $a = 4$.

9. $A^6 = \begin{pmatrix} 25 & -48 \\ 12 & -23 \end{pmatrix}$.

10. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}$.

11. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$.

12. $A^{2n} = I$ y $A^{2n-1} = A$. $\begin{pmatrix} -9 & -10a \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$.

13. a) $A^{2n} = I$ y $A^{2n-1} = A$. b) No puede darse una fórmula para la potencia A^n, pero puede observarse que en los elementos a_{12}, a_{21} y a_{22} aparecen los términos de la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… c) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $a = 2$.

17. $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

24. $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$.

25. a) 2. b) 2. c) 2.
26. a) 2 para cualquier valor de *a*. b) 2 si $a = 1$; 3 en los demás casos. c) 2 si $a = \pm 1$; 3 en los demás casos.
27. Si *a*, *b* y *c* son iguales, el rango es 1. Si *a*, *b* y *c* no son iguales, el rango es 2.
28. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/8 \\ 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$. c) No es invertible.
29. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$. c) No tiene inversa.
30. $A = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
31. $\lambda = \pm 3$.