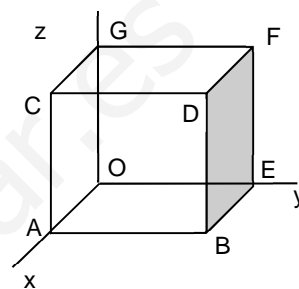


VECTORES. OPERACIONES:

1. Comprobar si los vectores \vec{AB} y \vec{CD} son equipolentes, siendo $A(2,1,3)$, $B(5,4,1)$, $C(2,1,5)$ y $D(3,2,-1)$. En caso negativo, hallar las coordenadas del punto D' para que \vec{AB} y \vec{CD}' sean equipolentes.
(Soluc: no son equipolentes; $D'(5,4,3)$)

2. Considerar el cubo de arista unidad de la figura. Indicar las coordenadas de dos vectores equipolentes a \vec{AB} y otro equipolente a \vec{AD} . Hallar $|\vec{AE}|$ y $|\vec{AF}|$



3. (S) Dos vectores \vec{a} y \vec{b} son tales que $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=10\sqrt{3}$ y $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. Hallar el ángulo que forman los vectores \vec{a} y \vec{b} . (Soluc: 90°)

4. Dados $\vec{u}=(1,4,3)$ y $\vec{v}=(2,3,2)$, dibujarlos sobre los mismos ejes, y hallar, gráfica y analíticamente: $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $2\vec{u}$, $3\vec{v}$ y $2\vec{u}+3\vec{v}$

5. Dados $\vec{u}=(5,2,15)$, $\vec{v}=(1,2,1)$, $\vec{w}=(2,-1,3)$, se pide:

a) Expresar \vec{u} como combinación lineal de \vec{v} y \vec{w} (Soluc: $\vec{u}=3\vec{v}+4\vec{w}$)

b) Expresar \vec{w} como combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} (Soluc: $\vec{w}=\frac{1}{4}\vec{u}-\frac{3}{4}\vec{v}$)

c) ¿Son linealmente dependientes o independientes \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} ?

d) ¿Cuál es el rango de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} ?

e) Volver a hacer el apartado c por determinantes.

6. a) Hallar el valor de k para que $\vec{u}=(1,2,-1)$, $\vec{v}=(0,1,2)$, $\vec{w}=(1,k,3)$ sean linealmente dependientes.
(Soluc: $k=-1$)

b) Obtener, en ese caso, una relación de dependencia entre \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} (Soluc: $\vec{u}=\vec{v}-\vec{w}$)

7. Considerar los vectores $\vec{a}=(3,1,0)$, $\vec{b}=(1,4,0)$, $\vec{c}=(0,5,3)$

a) Razonar que forman una base de V^3

b) Hallar las coordenadas de $\vec{x}=(7,0,3)$ en la base anterior. (Soluc: $\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$)

c) Intentar dibujar la situación anterior.

8. Las coordenadas de dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,0,0)$ y $B(0,1,0)$. Las coordenadas del centro M son $M(0,0,1)$. Hallar las coordenadas de los vértices C y D . Dibujar la situación. (Soluc: $C(0,-1,2)$ y $D(-1,0,2)$)

9. (S) Dados los puntos $A(2,3,9)$ y $B(1,-2,6)$, hallar tres puntos P , Q y R que dividan al segmento AB en cuatro partes iguales. (Soluc: $P(7/4,7/4,33/4)$, $Q(3/2,1/2,15/2)$, $R(5/4,-3/4,27/4)$)

PRODUCTO ESCALAR:

10. Dados $A(1,2,3)$ y $B(2,1,4)$, se pide:

a) Dibujar \vec{OA} y \vec{OB}

b) Hallar $d(A,B)$ (Soluc: $\sqrt{3} u$)

c) Hallar el ángulo entre \vec{OA} y \vec{OB} (Soluc: $\cong 21^\circ 4' 14''$)

d) Hallar m tal que $(0,3,m)$ sea \perp a \vec{OB} (Soluc: $m=-3/4$)

11. Sean $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ los vectores de la base ortonormal canónica de V^3 . Hallar:

a) $\vec{i} \cdot \vec{i}$ b) $\vec{i} \cdot \vec{j}$ c) $\vec{i} \cdot \vec{k}$ d) $\vec{j} \cdot \vec{j}$ e) $\vec{j} \cdot \vec{k}$ f) $\vec{k} \cdot \vec{k}$ (Soluc: 1; 0; 0; 1; 0; 1)

12. (S) Calcular los valores de x e y para que el vector $(x,y,1)$ sea ortogonal a los vectores $(3,2,0)$ y $(2,1,-1)$

(Soluc: $x=2, y=-3$)

13. Considérese un triángulo equilátero ABC de lado 6 u. Hallar $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ y $\vec{BC} \cdot \vec{AC}$

(Soluc: 18, -18, 18)

14. Desarrollar las siguientes expresiones: a) $(\vec{u} - \vec{v})^2$ b) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

15. Inventar tres vectores cualesquiera \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} , y comprobar que se verifica la propiedad distributiva:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

16. Demostrar que el vector $\vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{d} - (\vec{b} \cdot \vec{d}) \vec{c}$ es ortogonal al vector \vec{b}

17. Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores tales que $(\vec{u} + \vec{v})^2 = 25$ y $(\vec{u} - \vec{v})^2 = 9$. Calcular el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (Soluc: 4)

18. Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores tales que $|\vec{u}| = 9$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 17$. Calcular el módulo del vector \vec{v}

(Soluc: 8)

19. Obtener tres vectores cualesquiera \perp a $\vec{u} = (3,-1,5)$ ¿Cuál es su expresión general?

(Soluc: (a,b,c) tal que $3a-b+5c=0$)

20. Dados $\vec{u} = (3,-1,5)$ y $\vec{v} = (3,0,3)$, se pide:

a) Obtener un vector cualquiera \perp a ambos. (Soluc: p. ej. $(-1,2,1)$)

b) Obtener un vector cualquiera \perp a ambos y unitario. (Soluc: $(-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3, \sqrt{6}/6)$; también vale el opuesto)

c) Obtener un vector cualquiera \perp a ambos y de módulo 3 (Soluc: $(-\sqrt{6}/2, \sqrt{6}, \sqrt{6}/2)$; también vale el opuesto)

21. Encontrar los vectores unitarios de \mathbb{R}^3 que son perpendiculares a $\vec{v} = (1,0,1)$ y forman un ángulo de 60° con

$$\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (\text{Soluc: } (1/2, \sqrt{2}/2, -1/2) \text{ y } (-1/2, \sqrt{2}/2, 1/2))$$

PRODUCTO VECTORIAL:

22. Dados los puntos del ejercicio 10, hallar $\vec{OA} \times \vec{OB}$. Obtener también el ángulo entre \vec{OA} y \vec{OB} por producto vectorial, y comprobar que se obtiene el mismo resultado que por producto escalar.

23. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -1, 1)$ y $\vec{v} = (1, -2, -1)$, se pide:

a) Ángulo que forman. (Soluc: 60°)

b) Un vector perpendicular a ambos. (Soluc: $\vec{u} \times \vec{v} = (3, 3, -3)$)

c) Hallar el valor de m para que el vector $\vec{w} = (2, m, -4)$ sea \perp a \vec{v}

24. Inventar tres vectores cualesquiera \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} , y comprobar que el producto vectorial: **a)** Verifica la propiedad anticonmutativa. **b)** No verifica la asociativa. **c)** Sí verifica la asociativa mixta, y la distributiva respecto a la suma.

25. Dibujar el triángulo de vértices $A(1, 3, 5)$, $B(2, 7, 8)$ y $C(5, 1, -11)$ y calcular su área. (Soluc: $\sqrt{1118} \text{ u}^2$)

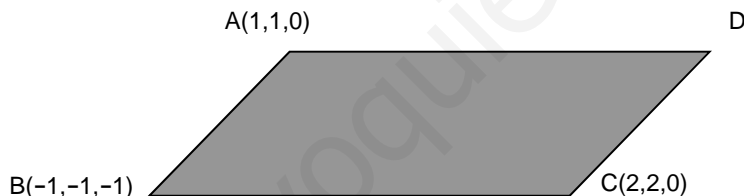
26. Comprobar analíticamente que $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$. ¿Qué consecuencia tiene este hecho?

Obtener también $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k}$, $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k})$, $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j}$ e $(\vec{i} \times \vec{j}) \times (\vec{k} \times \vec{i})$

27. Hacer de nuevo el ejercicio 20 por producto vectorial.

28. Hallar los dos vectores unitarios ortogonales a $(2, -2, 3)$ y $(3, -3, 2)$. (Soluc: $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ y $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$)

29. (S) Considérese la figura siguiente:



Se pide: **a)** Coordenadas de D para que ABCD sea un paralelogramo. (Soluc: $D(4, 4, 1)$)

b) Área de este paralelogramo. (Soluc: $S_{ABCD} = \sqrt{2} \text{ u}^2$)

30. (S) Explicar cómo puede hallarse el área de un triángulo a partir de las coordenadas de sus tres vértices (en el espacio). Aplicarlo a $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 0, 0)$, $C(0, 2, 3)$. (Soluc: $3\sqrt{5}/2 \text{ u}^2$)

31. Dados $\vec{u} = (-1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, 0)$

a) Hallar \mathbf{a} y \mathbf{b} para que \vec{u} y \vec{v} sean \perp a $\vec{w} = (a, 2, b)$ (Soluc: $a = -2$, $b = -6$)

b) Hallar el ángulo que forman \vec{u} y \vec{v} (Soluc: $\cong 73^\circ 13' 17''$)

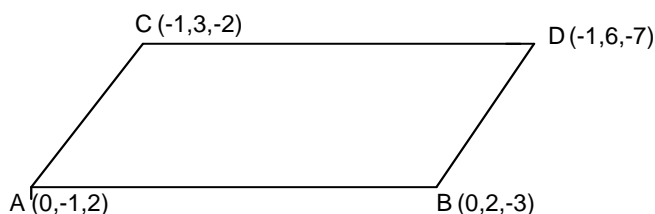
c) Hallar un vector perpendicular a \vec{u} y a $\vec{x} = (-1, 1, 0)$ y unitario. (Sol: $(-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$; también vale el opuesto)

32. Considerar el triángulo de vértices $A(1, 0, 2)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(3, -1, 2)$

a) Hallar su área. (Soluc: $5/2 \text{ u}^2$)

b) Hallar el ángulo correspondiente al vértice A (Soluc: 90°)

33. a) Demostrar (por equipolencia de vectores) que los siguientes puntos forman un paralelogramo en el espacio:



- b) Hallar el área del triángulo ABC (Soluc: $(\sqrt{98}/2) u^2$)

PRODUCTO MIXTO:

34. Comprobar con los vectores $\vec{u} = (3, 2, 4)$, $\vec{v} = (2, 1, -3)$ y $\vec{w} = (-2, -4, 0)$ que la definición del producto mixto y la expresión analítica coinciden.
35. Dibujar el tetraedro de vértices A(2, 1, 0), B(0, 1, 0), C(3, 3, 7) y D(0, 0, 0) y hallar su volumen. (Soluc: $7/3 u^3$)
36. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son A(2, 1, 4), B(1, 0, 2), C(4, 3, 2) y D(1, 5, 6) (Soluc: $5 u^3$)
37. Dados los puntos A(1, -2, 0), B(-2, 4, 4) y C(3, -1, -1), se pide:
- Hallar un vector \perp a \vec{AB} y \vec{AC} (Soluc: $(2, -1, 3)$)
 - Hallar el ángulo que forman los vectores \vec{AB} y \vec{AC} (Soluc: $\approx 102^\circ 4' 7''$)
 - Hallar el área del triángulo determinado por los tres puntos anteriores. (Soluc: $5\sqrt{14}/2 u^2$)
 - Hallar el volumen del tetraedro de vértices los tres puntos anteriores y el origen. (Soluc: $10/3 u^3$)
38. Dados $\vec{u} = (a, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 2, a)$ y $\vec{w} = (a, -2, 1)$, se pide:
- Hallar a para que \vec{w} sea \perp a \vec{u} y \vec{v} (Soluc: $a=1$)
 - Hallar a para que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} sean coplanarios. (Soluc: $a=-2, a=3$)
39. Hallar $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$ e interpretar gráficamente el resultado obtenido. (Soluc: 1)
40. **TEORÍA:**
- a) Demostrar que si \vec{u}, \vec{v} y \vec{w} son linealmente independientes, también lo son los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ y $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

b) Justificar que cualquier conjunto de vectores que contenga el vector nulo es L.D.

c) ¿Puede haber dos vectores \vec{u} y \vec{v} tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$?

d) Justificar por qué el producto mixto de los vectores \vec{a} , \vec{b} y $\vec{a} + \vec{b}$ es siempre nulo.

e) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, ¿podemos concluir que $\vec{v} = \vec{w}$? ¿Y si es $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$?

f) Si $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$, ¿qué podemos concluir del ángulo que forman?

g) Sean \vec{a}, \vec{b} y \vec{c} tres vectores linealmente independientes. Indicar razonadamente cuáles de los siguientes productos mixtos valen cero:

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}]$$

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}]$$

$$[\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}]$$