8 Límites de sucesiones y de funciones

Propuesta A

1. Calcula los tres términos siguientes y la expresión del término general de cada una de las siguientes sucesiones:

a) 4, 7, 10, 13, 16, … b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, ...$ c) 1, 4, 9, 16, 25, … d) 2, 5, 10, 17, 26, …

2. Dada la sucesión definida por recurrencia: $a_0 = 2,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n}$:

a) Calcula sus cinco primeros términos.

b) Halla su término general.

c) Sabiendo que es convergente, calcula su límite.

d) ¿Está acotada? Si es así, da una cota inferior y una superior.

3. Dada la sucesión de término general $a_n = 3 + \frac{2}{n}$:

a) Calcula sus tres primeros términos y halla el lugar que ocupa el término $a_s = \frac{28}{9}$.

b) Demuestra que es estrictamente decreciente.

c) Calcula su límite y averigua a partir de qué término los siguientes términos se aproximan a 3 con un error menor que $\varepsilon = 0{,}001$.

4. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n+1}-\frac{n^2+2n}{n-1}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^2-4n+1}{1+3n}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^{n+2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{2n^2}$

5. Calcula los límites laterales de las siguientes funciones racionales en los puntos en los que no están definidas. ¿Existe el límite de la función en esos puntos?

a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$ b) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-x}$

6. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+7x-31\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-100x-2009\right)$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2+7\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(x-5)(4-x^2)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(4-x)(4+x)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+5x^2+10\right)$

7. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{12+x}-4}$

8. Se considera la función: $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$, calcula $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

9. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-3x^3+4x}{x^4-16}$

Propuesta B

1. Calcula los tres términos siguientes y la expresión del término general de cada una de las siguientes sucesiones:

a) 10, 7, 4, 1, –2, … b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \ldots$ c) 1, 8, 27, 64, 125, … d) 0, 7, 26, 63, 124, …

2. Se considera la sucesión definida por recurrencia: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n$.

a) Calcula sus cinco primeros términos.

b) Halla su término general.

c) Si $b_n = |a_n|$ y $c_n = -|a_n|$, demuestra que b_n y c_n son progresiones geométricas. ¿Lo es también a_n?

d) Estudia la monotonía de a_n.

e) Halla, si existen, cotas superiores e inferiores para a_n.

f) Calcula el límite de a_n.

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1}-\frac{n^2+1}{n-2}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$ e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n+3}{3-8n}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{5n^2}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n^2+1}$

4. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-2x+1\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3x+2\right)$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+3\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4+x-3\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-x^2\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+5\right)$

5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+3}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{x+1}$

6. Calcula los límites laterales de las funciones racionales en los puntos en que no están definidas:

a) $f(x)=\frac{x-3}{x+3}$ b) $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ c) $f(x)=\frac{x^4-x^3+3x}{x^2-x}$

7. Calcula los siguientes límites de funciones irracionales:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

8. Se considera la función: $f(x)=\frac{x^2-1}{|x|-1}$. Calcula $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Soluciones propuesta A

1. a) $a_6 = 19$, $a_7 = 33$, $a_8 = 25$, $a_n = 3n + 1$

b) $a_6 = \frac{11}{12}$, $a_7 = \frac{13}{14}$, $a_8 = \frac{15}{16}$, $a_n = \frac{2n-1}{2n}$

c) $a_6 = 36$, $a_7 = 49$, $a_8 = 64$, $a_n = n^2$

d) $a_6 = 37$, $a7 = 50$, $a_8 = 65$, $a_n = n^2 + 1$

2. a) $a_0 = 2,\ a_1 = 2^{\frac{1}{2}},\ a_2 = 2^{\frac{1}{4}},$

$a_3 = 2^{\frac{1}{8}},\ a_4 = 2^{\frac{1}{16}},\ a_5 = 2^{\frac{1}{32}}$

b) $a_n = 2^{\frac{1}{2^n}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2^n}} = k \Rightarrow \log_2 k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow k = 1$

El límite de la sucesión es 1.

d) Está acotada superiormente por $a_0 = 2$ e inferiormente por su límite, 1.

3. a) $a_1 = 5,\quad a_2 = 4,\quad a_3 = \frac{11}{3}$

$3 + \frac{2}{s} = \frac{28}{9} \Leftrightarrow \frac{2}{s} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow s = 18$

b) $a_{n+1} - a_n = \left(3 + \frac{2}{n+1}\right) - \left(3 + \frac{2}{n}\right) = \frac{-2}{(n+1)n} < 0$

La sucesión es estrictamente decreciente.

c) $\lim a_n = \lim\left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3 + 0 = 3$

$|a_n - 3| < \varepsilon;\ \left|3 + \frac{2}{n} - 3\right| < 0{,}001 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{n}\right| < 0{,}001$

$2 < 0{,}001n \Rightarrow n > 2000$. A partir de a_{2000}.

4. a) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2n^2 - 4n}{n^2 - 1} = -2$

b) $l = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}$

c) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{3n} = -\infty$

d) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 2n}} = \frac{3}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{3}{2}$

e) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

f) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1+n}{2}n}{2n^2} = \frac{1}{4}$

5. a) $\lim\limits_{x\to -3^-} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -3^+} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} \left(\frac{x+2}{x^2-9}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{x^2-3x}{x^2-x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{x^2-3x}{x^2-x}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^2-3x}{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x(x-3)}{x(x-1)}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-3}{x-1} = 3$

6. a) –1

b) –20

c) $+\infty$

d) $-\infty$

e) $-\infty$

f) $+\infty$

7. Estos límites son del tipo $\frac{0}{0}$:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{12+x}-4} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{12+x}+4\right)}{\left(\sqrt{12+x}-4\right)\left(\sqrt{12+x}+4\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt{12+x}+4\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{12+x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)} = 2$

8. $\lim\limits_{x\to -1^-} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{x}{-x-1}\right) = -1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{|x|-1}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{+x-1}\right) = 1$

9. a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^3-x^2-2x)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{0}{32} = 0$

Soluciones propuesta B

1. a) $a_6 = -5$, $a_7 = -8$, $a_8 = -11$, $a_n = 13 - 3n$

b) $a_6 = \dfrac{12}{13}$, $a_7 = \dfrac{14}{15}$, $a_8 = \dfrac{16}{17}$, $a_n = \dfrac{2n}{2n+1}$

c) $a_6 = 216$, $a_7 = 343$, $a_8 = 512$, $a_n = n^3$

d) $a_6 = 215$, $a_7 = 342$, $a_8 = 511$, $a_n = n^3-1$

2. a) $a_0 = 1$, $a_1 = -\dfrac{1}{3}$, $a_2 = \dfrac{1}{3^2}$, $a_3 = -\dfrac{1}{3^3}$,

$a_4 = \dfrac{1}{3^4}$, $a_5 = -\dfrac{1}{3^5}$

b) $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{3^n}$

c) $b_n = \dfrac{1}{3^n}$, $c_n = -\dfrac{1}{3^n}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{-\frac{1}{3^{n+1}}}{-\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{n+1}}}{(-1)^n\frac{1}{3^n}} = -\frac{1}{3}$$

b_n y c_n son progresiones geométricas de razón $r = \dfrac{1}{3}$. a_n es una progresión geométrica de razón $r = -\dfrac{1}{3}$.

d) Como se puede ver en los primeros términos, a_n es oscilante.

e) Superior: $a_0 = 1$. Inferior: $a_1 = -\dfrac{1}{3}$.

f) $c_n \le a_n \le b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n \le \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3^n}\right) \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

3. a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2+1}{n-2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2-n+1}{n^2-3n+2}\right) = -1$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n+1}\cdot\frac{n+4}{5n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+8n^2}{5n^3+5n^2} = \frac{2}{5}$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{n^2+1}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1}} = +\infty$$

d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)^{\frac{3n^2+2}{5n-3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2}{5n-3}\right)\left(\frac{2n^2}{3n+1}\right)} = \left(e^{+\infty}\right) = +\infty$

e) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n+3}{3-8n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{-8}} = -\frac{1}{2}$

f) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2+2n}{2}n}{n^2+1} = 1$

4. a) 4 b) –3 c) +∞ d) –∞ e) +∞ f) +∞

5. Todos estos límites son del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

a) Simplificando por x^2:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = 1$$

b) Simplificando por x:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4}{x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\infty$$

6. a) $\displaystyle \lim_{x\to-3^-}\left(\frac{x-3}{x+3}\right) = +\infty$, $\displaystyle \lim_{x\to-3^+}\left(\frac{x-3}{x+3}\right) = -\infty$

b) $\displaystyle \lim_{x\to3^-}\frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$, $\displaystyle \lim_{x\to3^+}\frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$

c) $\displaystyle \lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^4+3x}{x^2-x}\right) = -\infty$ $\displaystyle \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x^4+3x}{x^2-x}\right) = +\infty$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x^4+3x}{x^2-x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x\left(x^3+3\right)}{x(x-1)} = \frac{3}{-1} = -3$$

7. a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x} = 0$$

b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

8. $\displaystyle \lim_{x\to-1^-}\left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = \lim_{x\to-1^-}\frac{(x+1)(x-1)}{-x-1} = \lim_{x\to-1^-}\frac{x-1}{-1} = 2$

$\displaystyle \lim_{x\to-1^+}\left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = \lim_{x\to-1^+}\frac{x-1}{-1} = 2$, $\displaystyle \lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = 2$

$\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = +\infty$, $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{|x|-1}\right) = +\infty$