8 Límites de sucesiones y de funciones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Saber estudiar la monotonía de una sucesión y determinar sus cotas si las tuviera.	**1.** Demuestra que la sucesión $a_n = \dfrac{2n+87}{n+1}$ es mónotona y está acotada. Determina la menor de las cotas superiores y la mayor de las inferiores. **2.** Estudia la monotonía y las cotas de la sucesión $a_n = \dfrac{n^2}{2n-1}$. ¿A partir de qué término los siguientes son mayores que $k = 2\,000\,000$?
B. Conocer y aplicar correctamente los métodos para resolver las indeterminaciones que surgen en las sucesiones.	**3.** Calcula los límites de las sucesiones racionales: a) $a_n = \dfrac{(2n-5)\cdot(7-3n)}{3-2n+n^2}$ b) $b_n = (-1)^n \cdot \dfrac{7-3n}{3-2n}$ c) $c_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1+2n}{5+n^2}$ **4.** Calcula los siguientes límites de sucesiones: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+4n}\right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+n}{2n-1}\right)^{5n+1}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+2n}{2n-1}\right)^{5n+1}$
C. Clasificar correctamente las sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes.	**5.** Demuestra que la sucesión $a_n = \dfrac{2n+7}{n+1}$ converge y que su límite es 2. ¿A partir de qué término de la sucesión se verifica que $\lvert a_n - 2\rvert < 0{,}000001$? **6.** Determina si la sucesión $a_n = \dfrac{n^2+n}{2n-1} - \dfrac{n^2+5}{2n+1}$ es convergente o divergente y calcula, en su caso, su límite.
D. Obtener los límites laterales de una función en un punto y determinar la existencia o no existencia del límite.	**7.** Calcula los límites laterales en $x = 1$ de las siguientes funciones y decide si existe o no su límite en ese punto. a) $f(x) = \begin{cases} 3x-8 & \text{si } x<1 \\ x^2+ax & \text{si } x>1 \end{cases}$ b) $g(x) = 2 + \dfrac{x^2-1}{\lvert x-1\rvert}$ c) $h(x) = e^{\frac{3}{1-x}}$ **8.** ¿Para qué valores del parámetro k existe el límite en $x = 2$ de la función $f(x) = \begin{cases} 3k^2x-5k^2 & \text{si } x<2 \\ x^2-2kx+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$? Calcula su límite en esos casos.
E. Demostrar en casos sencillos, mediante la definición métrica de límite, que el límite hallado por métodos algebraicos verifica la definición.	**9.** Aplica la definición métrica de límite para demostrar que: a) $\lim\limits_{x\to3}(2x+5) = 11$ b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-8}{x-2} = 8$ c) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3}{1-x} = +\infty$ En el apartado b) determina el radio δ del entorno $E(2, \delta)$ que verifica la definición de límite para un $\varepsilon = 0{,}02$.
F. Resolver indeterminaciones del tipo $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ utilizando métodos algebraicos.	**10.** Calcula los siguientes límites: a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-x^3-4x}{x^2-x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{\frac{4}{x-2}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1}}$ d) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$
H. Resolver indeterminaciones por infinitésimos equivalentes.	**11.** Calcula los siguientes límites utilizando infinitésimos equivalentes adecuados. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{2x}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x^3-8}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{tg}2x}$ d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{e^x-1}$

1. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2(n+1)+87}{(n+1)+1} - \dfrac{2n+87}{n+1} = \dfrac{-85}{(n+2)(n+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \ \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow$ es monótona decreciente.

La menor de las cotas superiores es $a_1 = \dfrac{89}{2}$ y la mayor de las inferiores es 2, su límite, ya que

$\dfrac{2n+87}{n+1} - 2 = \dfrac{85}{n+1} > 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$.

2. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{(n+1)^2}{2(n+1)-1} - \dfrac{n^2}{2n-1} = \dfrac{2n^2-1}{4n^2-1} > 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$

Es monótona creciente.

Cota inferior $a_1 = 1$. No está acotada superiormente. Para hallar a partir de qué término $a_n > 2\,000\,000$ se resuelve la inecuación:

$\dfrac{n^2}{2n-1} > 2\,000\,000 \Leftrightarrow n^2 - 4 \cdot 10^6 n + 2 \cdot 10^6 > 0$ y eso ocurre $\forall n > 3\,999\,999{,}5$, es decir, a partir del término $a_{4\,000\,000}$.

3. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-5)(7-3n)}{3-2n+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2\left(2-\dfrac{5}{n}\right)\left(\dfrac{7}{n}-3\right)}{n^2\left(\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{2}{n}+1\right)} =$

$= \dfrac{2 \cdot (-3)}{1} = -6.$

b) Como $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{7-3n}{3-2n}\right) = \dfrac{3}{2}$ los términos de la sucesión $(-1)^n \cdot \dfrac{7-3n}{3-2n}$ se acercarán alternativamente a $-\dfrac{3}{2}$ y a $\dfrac{3}{2}$, por lo que no tiene límite y es oscilante.

c) Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2n}{5+n^2} = 0$ y

$-\dfrac{1+2n}{5+n^2} \leqslant (-1)^n \cdot \dfrac{1+2n}{5+n^2} \leqslant \dfrac{1+2n}{5+n^2}$ entonces

$0 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1+2n}{5+n^2}\right) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{1+2n}{5+n^2} \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2n}{5+n^2} = 0$

y el límite buscado es 0. Converge a 0.

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n^2+4n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-4n}{n+\sqrt{n^2+4n}} = \dfrac{-4}{1+1} = -2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3+n}{2n-1}\right)^{5n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3+2n}{2n-1}\right)^{5n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\dfrac{2n-1}{4}}\right)^{\frac{2n-1}{4} \cdot \frac{4}{2n-1} \cdot (5n+1)} = e^{\frac{5}{2}}$

5. $\left|a_n - L\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{2n+7}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{5}{n+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{5}{\varepsilon} - 1$

Si $\varepsilon = 0{,}000\,001 \Rightarrow n > 4\,999\,999$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+n}{2n-1} - \dfrac{n^2+5}{2n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-9n+5}{4n^2-1} = 1$, luego es convergente.

7. a) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1} (3x-8) = -5$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1} (x^2+ax) = 1+a$

Por tanto, el límite existe $\Leftrightarrow a = -6$.

b) $\lim\limits_{x\to1^-} \left(2 + \dfrac{x^2-1}{|x-1|}\right) = \lim\limits_{x\to1^-} \left(2-(x+1)\right) = 0$

$\lim\limits_{x\to1^+} \left(2 + \dfrac{x^2-1}{|x-1|}\right) = \lim\limits_{x\to1^-} \left(2+(x+1)\right) = 4$. No tiene límite.

c) $\lim\limits_{x\to1^-} e^{\frac{3}{1-x}} = e^{+\infty} = +\infty \quad \lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{3}{1-x}} = e^{-\infty} = 0$

No tiene límite.

8. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2} (3k^2x - 5k^2) = k^2$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2} (x^2 - 2kx + 1) = 5 - 4k$.

Para que exista el límite, $k^2 = 5 - 4k \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -5 \end{cases}$

En el primer caso el límite es 1 y en el otro 25.

9. a) $|(2x+5)-11| < \varepsilon \Leftrightarrow 2\,|x-3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-3| < \dfrac{\varepsilon}{2} = \delta$

b) $\left|\dfrac{2x^2-8}{x-2} - 8\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{2(x-2)^2}{x-2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \dfrac{\varepsilon}{2} = \delta$

Si $\varepsilon = 0{,}02 \Rightarrow \delta = 0{,}01$

c) $\dfrac{3}{1-x} > k \Leftrightarrow 1-x < \dfrac{3}{k} \Leftrightarrow |x-1| < \dfrac{3}{k} = \delta$

10. a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^4-x^3-4x}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{(x-2)(x^3+x^2+2x)}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{16}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{\dfrac{2x+3}{x+1}}\right) = \sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x\to2} \left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^{\frac{4}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x+2}{2x}-1\right)\left(\frac{4}{x-2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{-4}{2x}\right)} = e^{-1}$

d) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to3} \dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{1}{12\sqrt{3}}$

11. a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\text{sen}\,3x}{2x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\text{sen}\,5x}{\text{tg}\,2x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{5x}{2x} = \dfrac{5}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\text{sen}(x-2)}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x-2}{x^3-8} = \dfrac{1}{12}$

d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3x^2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{3x^2}{x} = 0$