

3 Sistemas de ecuaciones lineales

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

A. Resolver sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

B. Expresar matricialmente un sistema de ecuaciones lineales y, si es posible, resolverlo utilizando la matriz inversa de la matriz de coeficientes.

C. Resolver, mediante la regla de Cramer, sistemas de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas.

D. Determinar, tanto por Gauss como aplicando el teorema de Rouché, la compatibilidad de sistemas de ecuaciones lineales, y resolverlos en el caso de ser compatibles.

E. Resolver sistemas homogéneos.

F. Determinar la posición relativa de dos rectas en el plano.

G. Discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro.

H. Plantear y resolver problemas que den lugar a sistemas de ecuaciones lineales.

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a) \begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + 5y + 3z = 14 \\ 4x - y - 4z = 3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y + 2z - t = 1 \\ 2x + 3y - z + t = 5 \\ x - 6y + 7z - 4t = -2 \end{cases}$$

2. Expresa matricialmente el siguiente sistema de ecuaciones lineales y resuélvelo, si es posible, por el método de la matriz inversa:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ 3x + 4y + z = 2 \\ x + 3y + z = -5 \end{cases}$$

3. Resuelve por el método de Cramer el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 8 \\ -x + 2y + z = 14 \end{cases}$$

4. Sabiendo que el sistema de ecuaciones representado por la siguiente ecuación matricial tiene un número infinito de soluciones, halla el valor de k .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

5. Halla todos los valores de k para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones diferentes de $(0, 0, 0)$ y calcula el conjunto de soluciones.

$$\begin{cases} 2x - 2y + kz = 0 \\ x + z = 0 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$$

6. Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas:

$$a) \begin{cases} r: x - 2y = 7 \\ r': 2x - y = 7 \end{cases} \quad b) \begin{cases} s: -x + y = 1 \\ s': -x + y = -1 \end{cases}$$

7. Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a) \begin{cases} x + y + z = a \\ x + (1+a)y + z = 2a \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} (1+a)x + (a-1)y = a \\ ax + (a+1)y = a-1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

8. Una empresa dispone de 27200 € para subvencionar una semana de estancia en uno de los tres balnearios A, B y C a 100 de sus empleados. Tras analizar el número de solicitudes para cada uno de los balnearios, se ha decidido subvencionar con 400 € a cada uno de los que acudan al A, con 160 € a los que vayan al B y con 200 € a los que soliciten el C. Si la cantidad total asignada para los que van al balneario A es cinco veces mayor que la asignada para el B, ¿cuántos empleados van a cada balneario?

Soluciones

$$1. a) \begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + 5y + 3z = 14 \\ 4x - y - 4z = 3 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E_1 \leftrightarrow E_2 \\ E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \rightarrow E_3 - 4E_1 \end{matrix}} \begin{cases} x + 5y + 3z = 14 \\ -7y - 5z = -17 \\ -21y - 16z = -53 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_3 \rightarrow E_3 - 3E_2} \begin{cases} x + 5y + 3z = 14 \\ -7y - 5z = -17 \\ -z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y + 2z - t = 1 \\ 2x + 3y - z + t = 5 \\ x - 6y + 7z - 4t = -2 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \rightarrow E_3 - E_1 \end{matrix}} \begin{cases} x - y + 2z - t = 1 \\ 5y - 5z + 3t = 3 \\ 5y - 5z + 3t = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 + y - 2z + t \\ y = \frac{3 + 5z - 3t}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{8 - 5\lambda + 2\mu}{5} \\ y = \frac{3 + 5\lambda - 3\mu}{5} \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -7 \\ z = 9 \end{cases}$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad x = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$y = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 14 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad z = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 7$$

4. Para que el sistema sea compatible indeterminado (infinitas soluciones), es necesario que el rango de la matriz ampliada sea 2, y para ello se necesita que:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5k - 25 = 0 \Rightarrow k = 5$$

Por tanto, $k = 5$.

5. Para que el sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial, debe ser compatible indeterminado, y para ello se necesita que $\text{rg}(A) < 3$, es decir, $|A| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k = 0 \Rightarrow k = 0$$

Si $k = 0$, el sistema es compatible indeterminado y, por tanto, tiene infinitas soluciones, que son:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -z \\ x = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ x = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

6. Se calculan los rangos de la matriz de coeficientes y la ampliada:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2. \text{ El sistema es compatible determinado y las rectas son secantes.}$$

$$b) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A^*) = 2. \text{ El sistema es incompatible y las rectas son paralelas.}$$

$$7. a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2$$

Si $a \neq 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = n.$ de incógnitas. Es un SCD con solución $x = a$, $y = 1$, $z = -1$.

Si $a = 0$, es un SCI con las siguientes soluciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

$$b) \begin{vmatrix} 1+a & a-1 \\ a & a+1 \end{vmatrix} = 3a+1$$

Si $a \neq -\frac{1}{3}$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 = n.$ de incógnitas.

Es un SCD con solución $x = \frac{3a-1}{3a+1}$, $y = \frac{-1}{3a+1}$.

Si $a = -\frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = \frac{-4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

El sistema es incompatible; no tiene solución.

$$c) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & a \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3a+15$$

Si $a = 5$, $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A^*) = n.$ de incógnitas. Es un SCD con solución $x = 2$, $y = 1$.

Si $a \neq 5$, $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A^*) = 3$. Es un sistema incompatible; no tiene solución.

8. El enunciado da lugar al siguiente sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas, donde x , y , z son el número de empleados que van a cada uno de los balnearios A, B y C, respectivamente.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 400x + 160y + 200z = 27200 \\ 400x = 5 \cdot 160y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 20 \\ z = 40 \end{cases}$$