

Ejercicios resueltos del Teorema de Bolzano

1. Demostrar que la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene al menos una solución real.

La función $f(x) = e^{-x} + 2 - x$ es continua en \mathbb{R} , por ser suma de funciones continuas, y en particular es continua en $[0, 3]$. Como además $f(0) = 3 > 0$ y $f(3) < 0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (0, 3): f(c) = 0$, esto es, $\exists c \in (0, 3): e^{-c} + 2 - x = 0$ (es decir, c es una solución real de la ecuación inicial).

2. Demostrar que existe al menos un número real x tal que $\sin x = x$.

Consideramos la función $f(x) = \sin x - x$ que es continua en \mathbb{R} , por ser suma de funciones continuas, y en particular es continua en $[-\pi, \pi]$. Como además $f(-\pi) = \pi > 0$ y $f(\pi) = -\pi < 0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (-\pi, \pi): f(c) = 0$, esto es, $\exists c \in (-\pi, \pi): \sin(c) - c = 0$ (es decir, c es una solución real de la ecuación inicial). Como consecuencia, $\exists x \in (-\pi, \pi)$ (que es c) tal que $\sin x = x$.

3. Como aplicación del Teorema de Bolzano prueba que las funciones $f(x) = \log x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en un punto.

Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = \log x - e^{-x}$ que es continua en \mathbb{R}^+ , por ser diferencia de funciones continuas, y en particular es continua en $[1, 2]$. Como además $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (1, 2): h(c) = 0$, esto es, $(c, h(c))$ es el punto de corte de ambas funciones.

4. ¿Tiene la ecuación $x^5 - 3x = 1$ alguna solución comprendida entre 1 y 2?

Consideramos la función $f(x) = x^5 - 3x - 1$ que es continua en \mathbb{R} , por una función polinómica, y en particular es continua en $[1, 2]$. Como además $f(1) = -3 < 0$ y $f(2) = 25 > 0$, aplicando el Teorema de Bolzano, $\exists c \in (1, 2): f(c) = 0$, esto es, la ecuación dada tiene una solución en el intervalo pedido.