

TEOREMA DE ROLLE

- 1) Dada la función $f(x) = |x|$, comprobar qué condiciones del teorema de Rolle se verifican en el intervalo $[-2,2]$.
- 2) Dada las funciones siguientes, comprueba que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. En caso afirmativo halla el valor c determinado por dicho teorema.
 - a) $f(x) = x^3 - 4x + 3$ en $[0,2]$
 - b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en $[0,1]$
 - c) $f(x) = |2x^2 - 1|$ en $[0,1]$
- 3) Halla a , b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ verifique las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[0,4]$.
- 4) Comprueba que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle para la función $f(x) = x^3 - 4x$ en el intervalo $[-2, 2]$. En caso afirmativo halla el valor c determinado por dicho teorema.
- 5) Dada las funciones siguientes, comprueba que se verifican las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. En caso afirmativo halla el valor c determinado por dicho teorema
 - a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ en $[1,3]$
 - b) $f(x) = x^3 - x$ en $[0,1]$
 - c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$ en el intervalo $[0,3]$.

SOLUCIONES

1) $f(x) = |x|$, es continua en \mathbb{R} , en particular en el intervalo $[-2,2]$ pero no es derivable en $(-2,2)$, ya que $f'(0^-) = -1$ y $f'(0^+) = 1$ por tanto, no se puede aplicar el teorema de Rolle.

2) a) $f(x) = x^3 - 4x + 3$ en $[0,2]$ como f es polinómica, es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$, veamos si se cumple la tercera hipótesis: $f(0) = 3$ y $f(2) = 8 - 8 + 3 = 3$, se puede aplicar Rolle, por tanto, podemos asegurar que existe al menos un $c \in (0,2)$ / $f'(c) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in (0,2)$$

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ esta función NO es continua en $[0,1]$, ya que $f(1) = 0$ y sin embargo $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, no es aplicable el teorema de Rolle.

$$c) f(x) = |2x^2 - 1| \rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } 2x^2 - 1 \geq 0 \\ -2x^2 + 1 & \text{si } 2x^2 - 1 < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -2x^2 + 1 & \text{si } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$f(0) = f(1) = 1$, pero sin embargo, f no es derivable en el intervalo $(0,1)$, ya que no es derivable en $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0,1)$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ cada trozo es continuo y derivable, por ser funciones polinómicas, tendrá que ser continua y derivable también en $x=2$ y $f(0) = f(4)$:

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 2c + 1 \\ \text{Continua en } x = 2: \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (cx + 1) = 2c + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b \end{array} \right\} \rightarrow 2c + 1 = 4 + 2a + b$$

$$\text{Derivable: } f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ c & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow 4 + a = c$$

Y por último: $f(0) = f(4) \Rightarrow b = 4c + 1$

$$\text{Sistema a resolver: } \left. \begin{array}{l} 2a + b - 2c = -3 \\ a - c = -4 \\ b - 4c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{array} \right\} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si } x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Teorema de Rolle $\rightarrow \exists c \in (0,4) / f'(c) = 0$ y como $f'(c) = \begin{cases} 2c-3 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2c - 3 = 0 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (0,4)$$

4) $f(x) = x^3 - 4x$ es continua y derivable en \mathbb{R} , polinómica, en particular es continua en el intervalo $[-2,2]$ derivable en $(-2,2)$, y por otra parte $f(-2) = 0 = f(2)$ por tanto, se puede

aplicar el teorema de Rolle $\rightarrow \exists c \in (-2,2) / f'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 4 = 0 \rightarrow c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

ambos en el intervalo pedido.

5) a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ es continua y derivable en \mathbb{R} , polinómica, en particular es continua en el intervalo $[1,3]$ derivable en $(1,3)$, y por otra parte $f(1) = -2 = f(3)$ por tanto, se puede aplicar el teorema de Rolle

$$\rightarrow \exists c \in (1,3) / f'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = 2c - 4 = 0 \rightarrow c = 2 \in (1,3)$$

b) $f(x) = x^3 - x$ es continua y derivable en \mathbb{R} , polinómica, en particular es continua en el intervalo $[0,1]$ derivable en $(0,1)$, y por otra parte $f(0) = 0 = f(1)$ por tanto, se puede aplicar el teorema de Rolle

$$\rightarrow \exists c \in (0,1) / f'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 1 = 0 \rightarrow c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0,1)$$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \end{cases}$ cada trozo es continuo y derivable, por ser funciones

polinómicas, tendrá que ser continua y derivable también en $x=1$ y $f(0) = f(3)$:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 3) = 2 \end{array} \right\} \text{continua}$$

derivabilidad en 1: $f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ obviamente, no es derivable en 1, por lo tanto, no

cumple las hipótesis del teorema de Rolle