ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

1.- Resuelve en las ecuaciones exponenciales y comprueba los resultados:

1) $5^{2x-1}=\sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$

2) $4^{x+1}+2^{x+3}-320=0$

3) $3^{2(x+1)}-28\cdot 3^{x}+3=0$

4) $5^{x}-97\cdot 5^{x/2}+6^{4}=0$

5) $10^{3-x}=1$

6) $2^{2x}+2^{2x-1}+2^{2(x-1)}+2^{2x-3}+2^{2(x-2)}=1984$

7) $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}=960$

8) $3^{x}+3^{1-x}=4$

9) $4e^{-3x}-5e^{-x}+e^{x}=0$

10) $2^{1-x^2}=\frac{1}{8}$

11) $2^{x-1}+2^{x}+2^{x+1}=7$

2.- Resuelve en los sistemas:

1) $\begin{cases} 3\cdot 5^{x}+2\cdot 6^{y+1}=807 \\ 15\cdot 5^{x-1}-6^{y}=339 \end{cases}$

2) $\begin{cases} lg\, x+lg\, y=3 \\ 2\,lg\, x-2\,lg\, y=-1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \lg x-\lg y=\lg 56-\lg 20 \\ \lg x+\lg y=1+\lg 20 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \lg_y(9-x)=1/2 \\ \lg_x(y+9)=2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \lg x+\lg y=2 \\ x-y=20 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \lg x-\lg y=1 \\ x+y=22 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \lg_x(y-18)=2 \\ \lg_y(x+3)=1/2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \lg_2(3^{y}-1)=x \\ 3\cdot 2^{x}-2\cdot 3^{y}=6 \end{cases}$

3.- Resuelve en las ecuaciones logarítmicas:

1) $(x^2-5x+9)\lg 2+\lg 125=3$

2) $\lg(2^{2-x})^{2+x}+\lg 1250=4$

3) $\dfrac{\lg 2+\lg(11-x^2)}{\lg(5-x)}=2$

4) $(x^2-4x+7)\lg 5+\lg 16=4$

5) $\lg\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\lg\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=0\ ;\ x\geq 1$

6) $3\lg x-\lg 32=\lg(x/2)$

7) $\lg_2 x\cdot \lg_x 2x\cdot \lg_{2x} y=\lg_x x^2$

8) $5\,lg\,\frac{x}{2}+2\,lg\,\frac{x}{3}=3\,lg\,x-lg\,\frac{32}{9}$

9) $2\lg x=3+\lg(x/10)$

10) $lg\sqrt{3x+1}-lg\sqrt{2x-3}=1-lg\,5$

ECUACIONES EXPONENCIALES

1.-.Resuelve las ecuaciones exponenciales y comprueba los resultados:

	Soluciones		*Soluciones*
1) $5^{2x-1}=\sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$	$x_1=1/2$ y $x_2=1/5$	**7)** $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}+2^{x-4}=960$***	$x=10$
2) $4^{x+1}+2^{x+3}-320=0$	$x=3$	**8)** $3^{x}+3^{1-x}=4$**	$x_1=0$, $x_2=1$
3) $3^{2(x+1)}-28\cdot 3^{x}+3=0$**	$x_1=1$, $x_2=-2$	**9)** $4e^{-3x}-5e^{-x}+e^{x}=0$	
4) $5^{x}-97\cdot 5^{x/2}+6^{4}=0$**	$x_1=8lg_5 2$, $x_2=8lg_5 3$	**10)** $2^{1-x^2}=\frac{1}{8}$*	$x_1=2$, $x_2=-2$
5) $10^{3-x}=1$*	$x=0$		
6) $2^{2x}+2^{2x-1}+2^{2(x-1)}+2^{2x-3}+2^{2(x-2)}=1984$	$x=5$	**11)** $2^{x-1}+2^{x}+2^{x+1}=7$***	$x=1$

Resolución:

1) $5^{2x-1}=\sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}\Leftrightarrow 5^{2x-1}=25^{\frac{x^2-\frac{1}{4}}{3}}\Leftrightarrow 5^{2x-1}=\left(5^2\right)^{\frac{x^2-\frac{1}{4}}{3}}\Leftrightarrow 5^{2x-1}=5^{2\cdot\frac{x^2-\frac{1}{4}}{3}}\Leftrightarrow 2x-1=2\cdot\dfrac{x^2-\frac{1}{4}}{3}\Leftrightarrow$

$3\cdot(2x-1)=2\cdot\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow 6x-3=2\cdot x^2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 12x-6=4x^2-1\Leftrightarrow 4x^2-12x_i+5=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\text{ ó } x=\frac{5}{2}$

Existen dos soluciones**,** $\mathbf{x_1=1/2}$ y $\mathbf{x_2=1/5}$

***De forma análoga se resuelven los ejercicios** 5)** y **11).**

2) $4^{x+1}+2^{x+3}-320=0 \Leftrightarrow (2^2)^{x+1}+2^x\cdot 2^3-320=0 \Leftrightarrow 2^{2x+2}+2^x\cdot 2^3-320=0 \Leftrightarrow 2^{2x}\cdot 2^2+2^x\cdot 2^3-320=0$

$2^{2x}\cdot 2^2+2^x\cdot 2^3-320=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4\cdot 2^{2x}+8\cdot 2^x-320=0$

Realizamos el cambio $2^x=t$, con lo que $2^{2x}=(2^x)^2=t^2$

$\Rightarrow 4t^2+8t-320=0 \Leftrightarrow t^2+2t-80=0 \quad \begin{cases} t_1=8=2^x \\ t_2=-10=2^x \end{cases}$

*Existe una única solución real***:** ***x =3***

*******De forma análoga se resuelven los ejercicios* **3) , 4)** *y* **8).**

6) $2^{2x}+2^{2x-1}+2^{2(x-1)}+2^{2x-3}+2^{2(x-2)}=1984 \Leftrightarrow 2^{2x}+2^{2x}\cdot 2^{-1}+2^{2x}\cdot 2^{-2}+2^{2x}\cdot 2^{-3}+2^{2x}\cdot 2^{-4}=1984 \Leftrightarrow$

$$2^{2x}+\frac{2^{2x}}{2}+\frac{2^{2x}}{2^2}+\frac{2^{2x}}{2^3}+\frac{2^{2x}}{2^4}=1984 \Leftrightarrow 2^{2x}+\frac{2^{2x}}{2}+\frac{2^{2x}}{4}+\frac{2^{2x}}{8}+\frac{2^{2x}}{16}=1984$$

$$t+\frac{t}{2}+\frac{t}{4}+\frac{t}{8}+\frac{t}{16}=1984 \Leftrightarrow 16t+8t+4t+2t+t=1984\cdot 16 \Leftrightarrow 31t=1984\cdot 16 \Leftrightarrow t=64\cdot 16=2^6\cdot 2^4=2^{10}$$

Realizamos el cambio $2^{2x}=, t$

$t=2^{2x}=2^{10} \Leftrightarrow 2x=10 \Leftrightarrow$ **x = 5**

********De forma análoga se resuelven los ejercicios* **7)** *y* **11).**

9) $4e^{-3x}-5e^{-x}+e^x=0 \quad \Leftrightarrow \frac{4}{e^{3x}}-\frac{5}{e^x}+e^x=0$

Realizamos el cambio $e^x=t$*, con lo que* t $e^{3x}=t^3$*, y resolvemos la ecuación:*

$$\frac{4}{t^3}-\frac{5}{t}+t=0 \Leftrightarrow 4-5t^2+t^3=0 \Leftrightarrow t^3-5t^2+4=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2-4t-4)=0$$

Las soluciones de esta ecuación son: $t_1=1,\quad t_2=2+2\sqrt{2},\quad t_3=2-2\sqrt{2}$

De donde obtenemos dos soluciones reales de la ecuación dada:

$t_1=1=e^x \Rightarrow \boldsymbol{x_1=0;}\quad t_2=2+2\sqrt{2}=e^x \Rightarrow \boldsymbol{x_2=ln\left(2+2\sqrt{2}\right)};\quad t_3=2-2\sqrt{2}=2^x$ *no tiene solución real* ·

SISTEMAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICOS

2.- Resuelve en los sistemas:

	Soluciones		*Soluciones*
1) $\begin{cases} 3\cdot 5^x+2\cdot 6^{y+1}=807 \\ 15\cdot 5^{x-1}-6^y=339 \end{cases}$	*x=3, y=2*	**5)** $\begin{cases} \lg x+\lg y=2 \\ x-y=20 \end{cases}$	*x=10+10^{1/2}, y=-10+10^{1/2}*
2) $\begin{cases} lg\,x+lg\,y=3 \\ 2\,lg\,x-2\,lg\,y=-1 \end{cases}$	$x=10^{5/4}$, $y=10^{7/4}$	**6)** $\begin{cases} \lg x-\lg y=1 \\ x+y=22 \end{cases}$	*x=20, y=2*
3) $\begin{cases} \lg x-\lg y=\lg 56-\lg 20 \\ \lg x+\lg y=1+\lg 20 \end{cases}$	$x=4\cdot 35^{1/2}$, $y=(10/7)\cdot 35^{1/2}$	**7)** $\begin{cases} \lg_x(y-18)=2 \\ \lg_y(x+3)=1/2 \end{cases}$	*x=3/2, y=81/4*
4) $\begin{cases} \lg_y(9-x)=1/2 \\ \lg_x(y+9)=2 \end{cases}$	*x=5, y=16*	**8)** $\begin{cases} \lg_2(3^y-1)=x \\ 3\cdot 2^x-2\cdot 3^y=6 \end{cases}$	*x=3, y=2*

Resolución:

1) $\begin{cases} 3\cdot 5^x + 2\cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15\cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$ $\begin{cases} 3\cdot 5^x + 2\cdot 6\cdot 6^y = 807 \\ \frac{15}{5}\cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases}$ $\begin{matrix} 5^x = t \\ 6^y = s \end{matrix}$ $\begin{cases} 5^x = t \\ 6^y = s \end{cases}$ $\begin{cases} 3t + 12s = 807 \\ 3t - s = 339 \end{cases}$ $\begin{cases} s = 36 \\ t = 125 \end{cases}$ $\begin{matrix} t = 5^x = 125 = 5^3 \Rightarrow \mathbf{x = 3} \\ s = 6^y = 36 = 6^2 \Rightarrow \mathbf{y = 2} \end{matrix}$

2) $\begin{cases} lg\, x + lg\, y = 3 \\ 2\, lg\, x - 2\, lg\, y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} lg\, x + lg\, y = 3 \\ 2\, lg\, x - 2\, lg\, y = -1 \end{cases}$ $\begin{matrix} lg\, x = t \\ lg\, y = s \end{matrix}$ $\begin{cases} lg\, x = t \\ lg\, y = s \end{cases}$ $\begin{cases} t + s = 3 \\ 2t - 2s = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} t = 5/4 \\ s = 7/4 \end{cases}$ $\begin{matrix} t = lg\, x = \frac{5}{4} \Rightarrow \mathbf{x} = 10^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{10^5} \\ s = lg\, y = \frac{7}{4} \Rightarrow \mathbf{y} = 10^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{10^7} \end{matrix}$

3) $\begin{cases} \lg x - \lg y = \lg 56 - \lg 20 \\ \lg x + \lg y = 1 + \lg 20 \end{cases}$ $\begin{cases} lg(x/y) = lg(56/20) \\ lg(xy) = lg\, 200 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x/y = 56/20 \\ xy = 200 \end{cases}$ $\begin{matrix} x_1 = 4\sqrt{35} \;;\; x_2 = -4\sqrt{35} \\ y_1 = 10\sqrt{35}/7 \;;\; y_2 = -10\sqrt{35}/7 \end{matrix}$

4) $\begin{cases} \lg_y(9-x) = 1/2 \\ \lg_x(y+9) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 9 - x = y^{1/2} \\ y + 9 = x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 9 - x = \sqrt{y} \\ y + 9 = x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = (9-x)^2 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 - 9 \\ (9-x)^2 = x^2 - 9 \end{cases}$ $\begin{cases} \mathbf{y = 16} \\ \mathbf{x = 5} \end{cases}$

5) $\begin{cases} lg\, x + lg\, y = 2 \\ x - y = 20 \end{cases}$ $\begin{cases} lg(x.y) = lg 100 \\ x - y = 20 \end{cases}$ $\begin{cases} x.y = 100 \\ x - y = 20 \\ x > 0 \;;\; y > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = -10 + 10\sqrt{2} \quad y_1 = -10 - 10\sqrt{2} \\ x_1 = 10 + 10\sqrt{2} \quad x_2 = 10 - 10\sqrt{2} \end{cases}$ $\begin{matrix} \mathbf{x = 10 + 10\sqrt{2}} \\ \mathbf{y = -10 + 10\sqrt{2}} \end{matrix}$

6) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1 \\ x + y = 22 \end{cases}$ *Se resuelve de forma similar al* **5)**.

7) $\begin{cases} \lg_x(y - 18) = 2 \\ \lg_y(x+3) = 1/2 \end{cases}$ *Se resuelve de forma similar al* **4)**.

8) $\begin{cases} lg_2(3^y - 1) = x \\ 3\cdot 2^x - 2\cdot 3^y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} 3^y - 1 = 2^x \\ 3\cdot 2^x - 2\cdot 3^y = 6 \end{cases}$ $t = 2^x \,;\, s = 3^y$ *A partir de aquí se resuelve de forma similar al* ***1)***.

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

3.- Resuelve las ecuaciones logarítmicas:

1) $(x^2-5x+9)\lg 2+\lg 125=3$

2) $\lg(2^{2-x})^{2+x}+\lg 1250=4$

3) $\dfrac{\lg 2 + \lg(11 - x^2)}{\lg(5-x)} = 2$

4) $(x^2-4x+7)\lg 5+\lg 16=4$

5) $\lg\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \lg\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = 0 \;;\; x \ge 1$

6) $3\lg x - \lg 32 = \lg(x/2)$

7) $\lg_2 x \cdot \lg_x 2x \cdot \lg_{2x} y = \lg_x x^2$

8) $5\, lg\dfrac{x}{2} + 2\, lg\dfrac{x}{3} = 3\, lg\, x - lg\dfrac{32}{9}$

9) $2\lg x = 3 + \lg(x/10)$

10) $lg\sqrt{3x+1} - lg\sqrt{2x-3} = 1 - lg 5$

Resolución:

1) $(x^2-5x+9)\lg 2+\lg 125=3 \Rightarrow lg\, 2^{x^2-5x+9} + lg\, 125 = lg\, 1000 \Rightarrow lg\left(2^{x^2-5x+9}\cdot 125\right) = lg\, 1000 \Rightarrow 2^{x^2-5x+9}\cdot 125 = 1000 \Rightarrow$

$2^{x^2-5x+9} = 8 \Rightarrow 2^{x^2-5x+9} = 2^3 \Rightarrow x^2 - 5x + 9 = 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \mathbf{x_1 = 2,\ x_2 = 3}$

2) $\lg(2^{2-x})^{2+x}+\lg 1250=4 \Rightarrow \lg[(2^{2-x})^{2+x}\cdot 1250]=\lg 10^4 \Rightarrow (2^{2-x})^{2+x}\cdot 1250=10^4 \Rightarrow (2^{2-x})^{2+x}=8 \Rightarrow 2^{4-x^2}=2^3 \Rightarrow$

$4-x^2=3 \Rightarrow$ $\mathbf{x_1=1,\ x_2=-1}$

3) $\dfrac{\lg 2+\lg(11-x^2)}{\lg(5-x)}=2 \Rightarrow \lg 2+\lg(11-x^2)=2\cdot\lg(5-x) \Rightarrow \lg[2\cdot(11-x^2)]=\lg(5-x)^2 \Rightarrow 2\cdot(11-x^2)=(5-x)^2 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots$

Al resolver la ecuación de segundo grado resultante da dos soluciones, $\mathbf{x_1=3,\ x_2=1/3}$*, que son también soluciones de la ecuación logarítmica dada.*

4) $(x^2-4x+7)\lg 5+\lg 16=4 \Rightarrow lg\, 5^{x^2-4x+7}+lg\,16=lg\,10^4 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad \boldsymbol{x_1=1,\ x_2=3}$

Se resuelve de forma similar al ***1)****.*

5) $\lg\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\lg\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=0\ ;\ x\geq 1 \Rightarrow lg\,\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=lg\,1\ ;\ x\geq 1 \Rightarrow \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=1;\ x\geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+\sqrt{x^2-1}=x-\sqrt{x^2-1}\ ;\ x\geq 1 \Rightarrow 2\sqrt{x^2-1}=0;\ x\geq 1 \Rightarrow x^2-1=0;\ x\geq 1 \Rightarrow \mathbf{x=1}$

6) $3\lg x-\lg 32=\lg(x/2) \Rightarrow lg\,\frac{x^3}{32}=lg\,\frac{x}{2} \Rightarrow \left.\begin{cases}\frac{x^3}{32}=\frac{x}{2} \Rightarrow x^3=16x \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-4,\ x_3=4\\ x>0\end{cases}\right\}\mathbf{x=4}$

7) $\lg_2 x\cdot\lg_x 2x\cdot\lg_{2x} y=\lg_x x^2 \Rightarrow \cancel{lg_2\, x}\cdot\frac{\cancel{lg_2\, 2x}}{\cancel{lg_2\, x}}\cdot\frac{lg_2\, y}{\cancel{lg_2\, 2x}}=\frac{lg_2\, x^2}{lg_2\, x} \Rightarrow lg_2\, y=\frac{2\,\cancel{lg_2\, x}}{\cancel{lg_2\, x}} \Rightarrow lg_2\, y=2 \Rightarrow$ $\mathbf{y=4,\ \forall x>0}$

8) $5\lg\frac{x}{2}+2\lg\frac{x}{3}=3\lg x-\lg\frac{39}{9} \Rightarrow lg\left(\frac{x}{2}\right)^5+lg\left(\frac{x}{3}\right)^2=lg\left(\frac{x^3}{32/9}\right) \Rightarrow lg\left(\frac{x^5}{2^5}\cdot\frac{x^2}{3^2}\right)=lg\,\frac{9x^3}{32} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^7}{2^5\cdot 3^2}=\frac{9x^3}{32} \Rightarrow x^7=81x^3\\ x>0\end{cases}$

La ecuación $x^7=81x^3$ tiene tres soluciones reales, x=0, x=-3, x=3. De ellas, sólo ***x=3****, es solución de la ecuación logarítmica dada.*

9) $2\lg x=3+\lg(x/10) \Rightarrow \lg x^2=\lg 1000+\lg(x/10) \Rightarrow \lg x^2=\lg(1000x/10) \Rightarrow \lg x^2=\lg 100x \Rightarrow x^2=100x,\quad x>0 \Rightarrow \mathbf{x=10}$

10) $lg\sqrt{3x+1}-lg\sqrt{2x-3}=1-lg\,5 \Rightarrow lg\,\frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{2x-3}}=lg\,\frac{10}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{2x-3}}=2 \Rightarrow \frac{3x+1}{2x-3}=4 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad \boldsymbol{x=11/5}$