Problema 1 Calcular los siguientes límites:

1. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{5x^3 - x + 5}{-2x^3 - 5}$
2. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 1} \right)^{2x}$
3. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{36x^2 - 5x + 2}}{-x^2 + x - 2}$
4. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{6x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 3x + 1}{3x^3 - 2x^2 - 4x + 3}$
5. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 7} \frac{\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{6x + 5}}{x - 7}$

Solución:

1. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{5x^3 - x + 5}{-2x^3 - 5} = -\frac{5}{2}$
2. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 1} \right)^{2x} = e^{-2}$
3. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{36x^2 - 5x + 2}}{-x^2 + x - 2} = 0$
4. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{6x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 3x + 1}{3x^3 - 2x^2 - 4x + 3} = 18$
5. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 7} \frac{\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{6x + 5}}{x - 7} = \frac{4\sqrt{47}}{47}$

Problema 2 Calcular las siguientes derivadas:

1. $y = e^{2x^3 - x^2 - 5x + 1}$
2. $y = \ln(8x^5 - 1)$
3. $y = (x^2 - x - 2)^{12}$
4. $y = (x^2 + 2x + 1)(x^3 - 5x^2 - 3)$
5. $y = \frac{7x^2 + x + 1}{7x - 1}$

6. $y = x^3 \ln x$

Solución:

1. $y = e^{2x^3-x^2-5x+1} \Longrightarrow y' = (6x^2-2x-5)e^{2x^3-x^2-5x+1}$
2. $y = \ln(8x^5-1) \Longrightarrow y' = \dfrac{40x^4}{8x^5-1}$
3. $y = (x^2-x-2)^{12} \Longrightarrow y' = 12(x^2-x-2)^{11}(2x-1)$
4. $y = (x^2+2x+1)(x^3-5x^2-3) \Longrightarrow y' = (2x+2)(x^3-5x^2-3)+(x^2+2x+1)(3x^2-10x)$
5. $y = \dfrac{7x^2+x+1}{7x-1} \Longrightarrow y' = \dfrac{(14x+1)(7x-1)-(7x^2+x+1)7}{(7x-1)^2}$
6. $y = x^3 \ln x \Longrightarrow y' = 3x^2 \ln x + x^3 \dfrac{1}{x}$

Problema 3 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{5x^2-1}{x^2+3}$ en el punto $x = 1$.
2. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-5}$ en el punto $x = 0$.

Solución:

1. $b = f(a) \Longrightarrow b = f(1) = 1$ e $y - b = m(x-a)$

$$f'(x) = -\frac{32x}{(x^2+3)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = 2$$

Recta Tangente: $y - 1 = 2(x-1)$

Recta Normal: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1)$

2. $b = f(a) \Longrightarrow b = f(0) = -\dfrac{2}{5}$ e $y - b = m(x-a)$

$$f'(x) = -\frac{17}{(x-5)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = -\frac{17}{25}$$

Recta Tangente: $y + \dfrac{2}{5} = -\dfrac{17}{25}x$

Recta Normal: $y + \dfrac{2}{5} = \dfrac{25}{17}x$

Problema 4 Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \left(\frac{2x^2 - 5\sqrt[4]{x} + 1}{x} - 7e^x\right) dx$

2. $\displaystyle\int 3xe^{4x^2-8}\, dx$

3. $\displaystyle\int 5x(3x^2-2)^{18}\, dx$

4. $\displaystyle\int \frac{4x}{3x^2-2}\, dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \left(\frac{2x^2 - 5\sqrt[4]{x} + 1}{x} - 7e^x\right) dx = x^2 - 20x^{1/4} + \ln|x| - 7e^x + C$

2. $\displaystyle\int 3xe^{4x^2-8}\, dx = \frac{3}{8}e^{4x^2-8} + C$

3. $\displaystyle\int 5x(3x^2-2)^{18}\, dx = \frac{5(3x^2-2)^{19}}{114}$

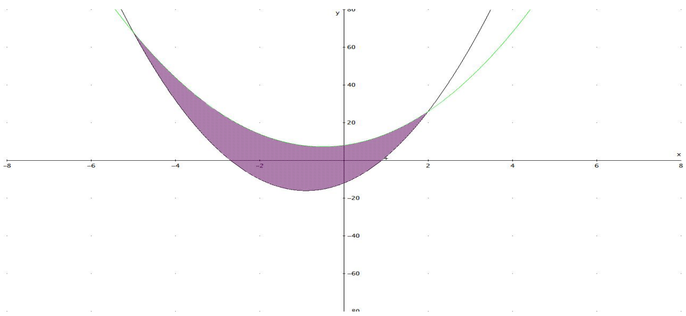
4. $\displaystyle\int \frac{4x}{3x^2-2}\, dx = \frac{2}{3}\ln|3x^2-2| + C$

Problema 5 Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 5x^2 + 9x - 12$ y $g(x) = 3x^2 + 3x + 8$. **Solución:**

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 5x^2 + 9x - 12 = 3x^2 + 3x + 8 \Longrightarrow x = -5, \;\; x = 2$$

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (2x^2 + 6x - 20)\, dx = \frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 20x$$

$$S_1 = \int_{-5}^{2} (f(x) - g(x))\, dx = F(2) - f(-5) = -\frac{343}{3}\; u^2$$



Problema 6 Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$. **Solución:**

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 + 3x^2 - 10x = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = -5, \;\; x = 2$$

Luego tenemos dos áreas. S_1 en $[0, 2]$ y S_2 en $[2, 3]$

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x^3 + 3x^2 - 10x)\,dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - 5x^2$$

$$S_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - f(0) = -8 \quad S_2 = \int_2^3 f(x)\,dx = F(3) - f(2) = \frac{41}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = |-8| + \left|\frac{41}{4}\right| = \frac{73}{4}\ u^2$$