Problema 1 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{15x^3 - x^2 + 2x + 1}{3x^3 - 4x^2 + 7}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2 - x + 1}{3x^2 + 5x - 2}\right)^{x^2+6}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 5}\right)^{3x}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{5x^3 + x - 1}}{x^2 + x - 6}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{8x^4 - 3x^2 - 4x - 1}{4x^5 - 5x + 1}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 - x - 2}$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow 7} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{8x - 5}}{x - 7}$

8. $\lim\limits_{x\longrightarrow 5} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{4x + 3}}{x - 5}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{15x^3 - x^2 + 2x + 1}{3x^3 - 4x^2 + 7} = 5$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2 - x + 1}{3x^2 + 5x - 2}\right)^{x^2+6} = 0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 5}\right)^{3x} = e^{-3}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{5x^3 + x - 1}}{x^2 + x - 6} = 0$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{8x^4 - 3x^2 - 4x - 1}{4x^5 - 5x + 1} = \dfrac{22}{15}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 - x - 2} = \dfrac{1}{7}$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow 7}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{8x-5}}{x-7}=\dfrac{\sqrt{51}}{17}$

8. $\lim\limits_{x\longrightarrow 5}\dfrac{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{4x+3}}{x-5}=\dfrac{3\sqrt{23}}{23}$

Problema 2 Calcular las siguientes derivadas:

1. $y=e^{5x^3-2x^2-x-1}$
2. $y=\ln(2x^3-3)$
3. $y=(x^2-3x+1)^{17}$
4. $y=(x^2-2x+1)(x^3-x^2+2)$
5. $y=\frac{x^2+1}{7x-1}$
6. $y=\ln\frac{x^2+8}{x^2-4}$

Solución:

1. $y=e^{5x^3-2x^2-x-1}\Longrightarrow y'=(15x^2-4x-1)e^{5x^3-2x^2-x-1}$
2. $y=\ln(2x^3-3)\Longrightarrow y'=\dfrac{6x^2}{2x^3-3}$
3. $y=(x^2-3x+1)^{17}\Longrightarrow y'=17(x^2-3x+1)^{16}(2x-3)$
4. $y=(x^2-2x+1)(x^3-x^2+2)\Longrightarrow y'=(2x-2)(x^3-x^2+2)+(x^2-2x+1)(3x^2-2x)$
5. $y=\dfrac{x^2+1}{7x-1}\Longrightarrow y'=\dfrac{(2x)(7x-1)-(x^2+1)7}{(7x-1)^2}$
6. $y=\ln\dfrac{x^2+8}{x^2-4}=\ln(x^2+8)-\ln(x^2-4)\Longrightarrow y'=\dfrac{2x}{x^2+8}-\dfrac{2x}{x^2-4}$

Problema 3 Calcular las rectas tangente y normal en los sigientes casos:

1. a la función $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x-5}$ en el punto de abcisa $x=2$.
2. En este caso sólo la recta o rectas tangentes la función $f(x)=x^2-x+2$ sabiendo que ésta o éstas son paralelas a la recta $y=7x-11$.

Solución:

1. $f(2) = -\dfrac{4}{3}$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 3}{(x-5)^2} \Longrightarrow m = f'(2) = -\dfrac{13}{9}$:

$$\text{Recta tangente} : y + \frac{4}{3} = -\frac{13}{9}(x-2)$$

$$\text{Recta normal} : y + \frac{4}{3} = \frac{9}{13}(x-2)$$

2. $m = f'(a) = 7$:

$$f'(x) = 2x - 1 \Longrightarrow m = f'(a) = 2a - 1 = 7 \Longrightarrow a = 4$$

$$a = 4 \Longrightarrow b = f(4) = 14 \Longrightarrow y - 14 = 7(x-4)$$