Problema 1 Calcular el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1}$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{\sqrt{x - 3}}$

Solución:

1. $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x - 1} \Longrightarrow \mathit{Dom}\, f = (-\infty, -3] \cup (1, \infty)$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{\sqrt{x - 3}} \Longrightarrow \mathit{Dom}\, f = (3, \infty)$

Problema 2 Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, calcular: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.
Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2} - 1}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+1} + 1} = \frac{x+1}{x+2}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 2}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \dfrac{5x+1}{2x-1}$, calcular la función inversa.
Solución:

$$y = \frac{5x+1}{2x-1} \Longrightarrow 2yx - y = 5x + 1 \Longrightarrow 2yx - 5x = y + 1 \Longrightarrow$$

$$(2y - 5)x = y + 1 \Longrightarrow x = \frac{y+1}{2y-5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2x-5}$$

Problema 4 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x \longrightarrow -2} \dfrac{x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 5x - 2}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 4}$

2. $\lim_{x \longrightarrow 4} \dfrac{x - 4}{2 - \sqrt{x^2 - 12}}$

Solución:

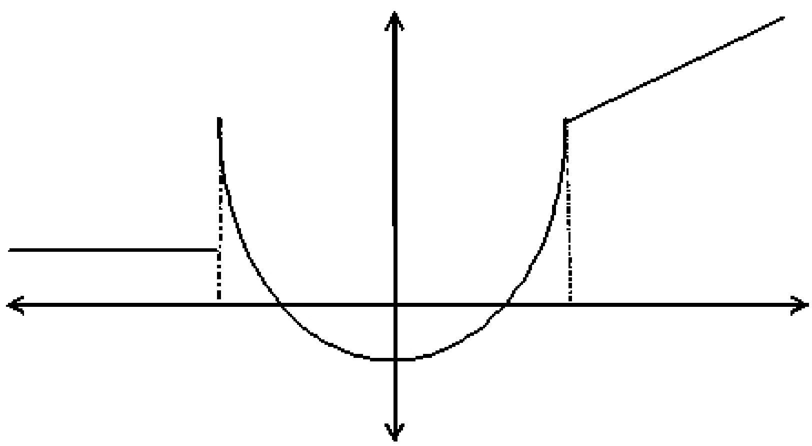
1. $\lim_{x \longrightarrow -2} \dfrac{x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 5x - 2}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 4} = -\dfrac{3}{4}$

2. $\lim_{x \longrightarrow 4} \dfrac{x - 4}{2 - \sqrt{x^2 - 12}} = -\dfrac{1}{2}$

Problema 5 Dibujar la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad -2 < x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución:



Problema 6 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. $\text{Dom} f = R - \{1\}$
2. Si hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 4)$. Y si hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (2, 0)$ y $(-2, 0)$
3. $$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{(-x - 1)} = -\frac{x^2 - 4}{x + 1}$$

   La función ni es par ni impar.
4. - **Verticales:** $x = 1$

     $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = \infty$$

   - **Horizontales:**

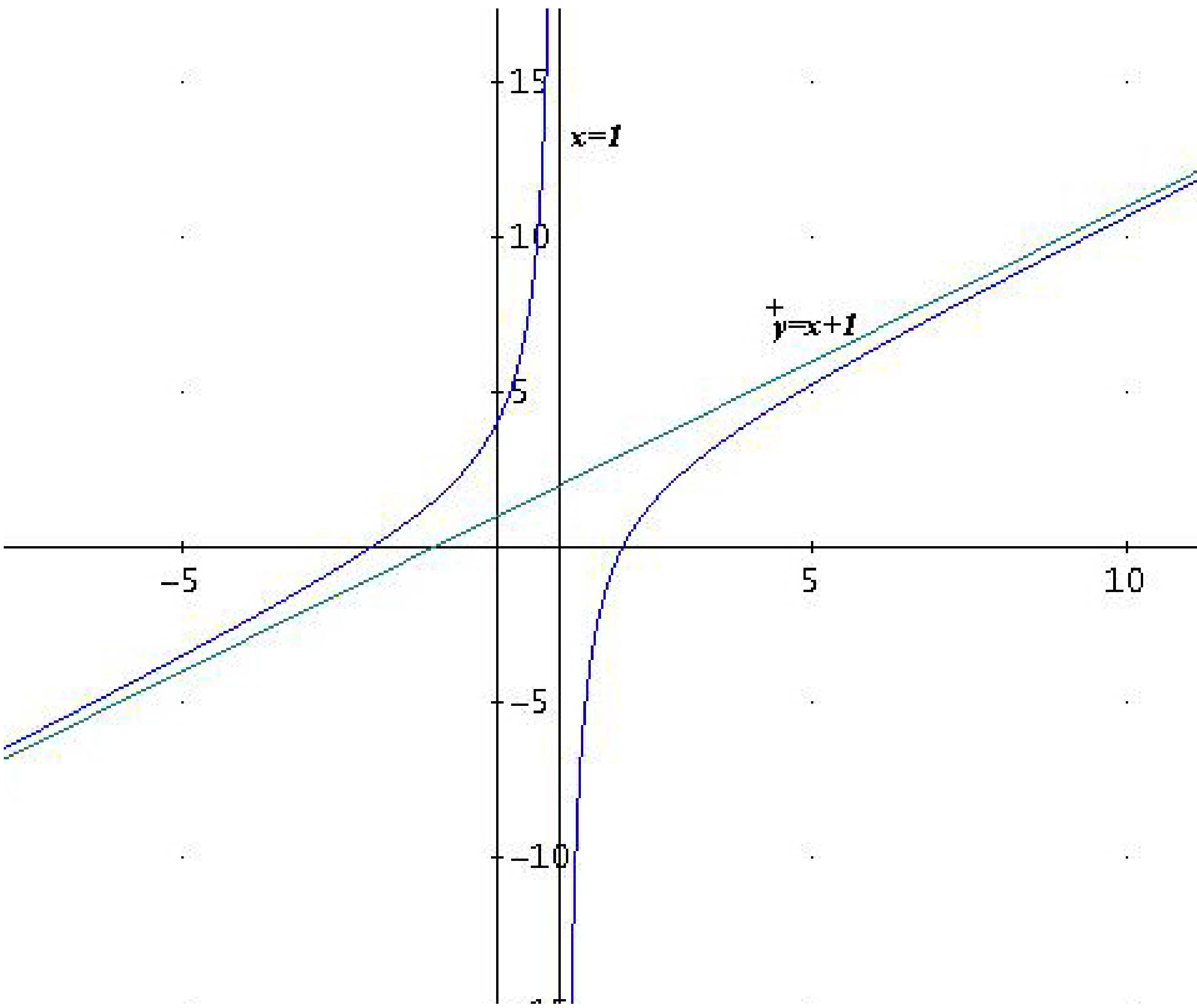
     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \infty \Longrightarrow \text{No Hay}$$

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

     $$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} = 1$$

     $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 1} - x\right) = 1$$

     $$y = x + 1$$



15
10
5
−5
−10
−5
5
10
x=1
y=x+1