

Problema 1 Calcular el dominio de las siguientes funciones:

$$1. \ f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x + 1}$$

$$2. \ f(x) = \frac{x^2 - 5}{\sqrt{x - 1}}$$

Solución:

$$1. \ f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x + 1} \implies \text{Dom } f = (-\infty, -1) \cup [3, \infty)$$

$$2. \ f(x) = \frac{x^2 - 5}{\sqrt{x - 1}} \implies \text{Dom } f = (1, \infty)$$

Problema 2 Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{x+3}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, calcular:

$f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 + 5}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x+3}\right) = \sqrt{\frac{1}{(x+3)^2} + 5}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x+3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+3} + 3} = \frac{x+3}{3x+10}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x^2 + 5}) = \sqrt{(\sqrt{x^2 + 5})^2 + 5} = \sqrt{x^2 + 10}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$, calcular la función inversa.

Solución:

$$y = \frac{2x+3}{x+1} \implies yx + y = 2x + 3 \implies yx - 2x = 3 - y \implies$$

$$(y-2)x = 3-y \implies x = \frac{3-y}{y-2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-2}$$

Problema 4 Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^4 - 3x^2 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x - 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 21}}{x - 5}$$

Solución:

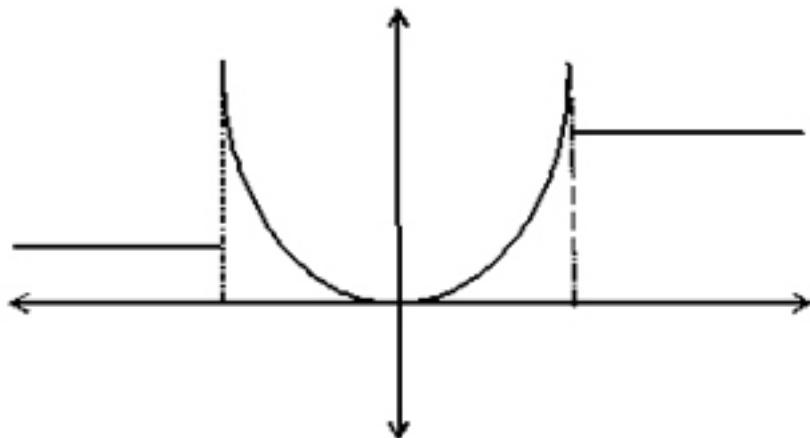
$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - x^4 - 3x^2 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x - 2} = -1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 21}}{x - 5} = -\frac{5}{2}$$

Problema 5 Dibujar la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:



Problema 6 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x}$$

Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. $\text{Dom } f = R - \{0\}$
2. Si hacemos $x = 0 \implies$ no hay corte con el eje OY . Y si hacemos $f(x) = 0 \implies (3, 0)$ y $(-3, 0)$
- 3.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 9}{(-x)} = -\frac{x^2 - 9}{x}$$

La función es impar.

4. • **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 9}{x} = \left[\frac{-9}{0^+} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 9}{x} = \left[\frac{-9}{0^-} \right] = \infty$$

• **Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x} = \infty \implies \text{No Hay}$$

• **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 9}{x} - x \right) = 0$$

$$y = x$$

