Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

Se pide:

a) Calcular sus asíntotas.

b) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

c) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

a) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{7}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{7}{0^+}\right] = +\infty$$

$x = -2$

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{7}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{7}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4} = 2$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

b)

$$f'(x) = -\frac{-14x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$.
La función es decreciente en el intervalo $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.
La función tiene un máximo en el punto $(0, 1/4)$.

c) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$:

Como $m = f'(1) = -14/9$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y + \frac{1}{3} = -\frac{14}{9}(x-1)$$

$$\text{Recta Normal}: \ y + \frac{1}{3} = \frac{9}{14}(x-1)$$

Como $f(1) = -1/3$ las rectas pasan por el punto $(1, -1/3)$.

Problema 2 Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt{5x^2+8}}{2x+1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^3+5x^2-x+1}{2x^3+x-3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x+5}{x^2+x-1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2+8}{2x-1}$

e) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{3x^3-2x^2+5x-6}{7x^2-8x+1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{\sqrt{2x^2-1}-7}{x-5}$

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt{5x^2+8}}{2x+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{3x^3 + 5x^2 - x + 1}{2x^3 + x - 3} = \dfrac{3}{2}$

c) $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x + 5}{x^2 + x - 1} = 0$

d) $\lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{3x^2 + 8}{2x - 1} = \infty$

e) $\lim_{x \longrightarrow 1} \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 6}{7x^2 - 8x + 1} = \dfrac{5}{3}$

f) $\lim_{x \longrightarrow 5} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 1} - 7}{x - 5} = \dfrac{10}{7}$

Problema 3 Calcular las siguientes derivadas:

a) $y = e^{4x^3 - x + 1}$

b) $y = \ln(2x^5 + 2)$

c) $y = (x^2 + 2)^{11}$

d) $y = (x^2 + 1)(2x^2 - 1)$

e) $y = \frac{2x+1}{x-6}$

Solución:

a) $y = e^{4x^3 - x + 1} \Longrightarrow y' = (12x^2 - 1)e^{4x^3 - x + 1}$

b) $y = \ln(2x^5 + 2) \Longrightarrow y' = \dfrac{10x}{2x^5 + 2}$

c) $y = (x^2 + 2)^{11} \Longrightarrow y' = 11(x^2 + 2)^{10}(2x)$

d) $y = (x^2 + 1)(2x^2 - 1) \Longrightarrow y' = (2x)(2x^2 - 1) + (x^2 + 1)(4x)$

e) $y = \dfrac{2x + 1}{x - 6} \Longrightarrow y' = \dfrac{2(x - 6) - (2x + 1)}{(x - 6)^2}$

Problema 4 Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int (3x^2 - 4x + 2)\, dx$

b) $\displaystyle\int xe^{x^2 - 2}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2 - 2}\, dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int (3x^2 - 4x + 2)\, dx = x^3 - 2x^2 + 2x + C$

b) $\displaystyle\int xe^{x^2-2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2-2} + C$

c) $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2 - 2}\, dx = \frac{5}{2}\ln|x^2 - 2| + C$