Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$$

Se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcular su signo.

d) Calcular su simetría.

e) Calcular sus asíntotas.

f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.

h) Representación gráfica.

i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

c)

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo	$-$	$+$

d) $f(-x) = -f(x) \Longrightarrow$ la función es IMPAR.

e) Asíntotas:

- **Verticales:** No hay, el denominador no se anula nunca.

- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x}{x^2+1} = 0$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f)

$$f'(x) = -\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-1, 1)$.
La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
La función tiene un máximo en el punto $(1, 3/2)$ y un mínimo en el punto $(-1, -3/2)$.

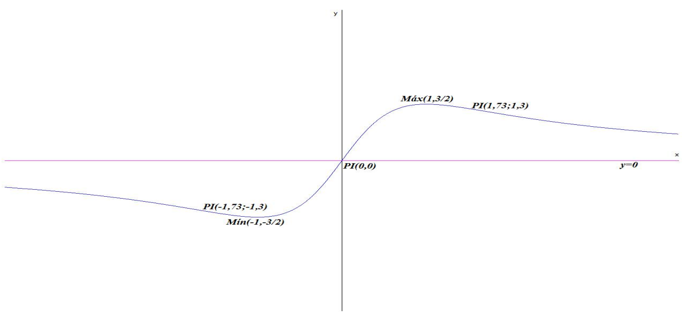
g)

$$f''(x) = \frac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = \pm\sqrt{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa	cóncava

f es cóncava en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y convexa en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$. Y tiene tres puntos de inflexión en los puntos $(0, 0)$, $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ y $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 2$:

Como $m = f'(2) = -32/9$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y - \frac{6}{5} = -\frac{9}{25}(x-2)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y - \frac{6}{5} = \frac{25}{9}(x-2)$$

Como $f(2) = 6/5$ las rectas pasan por el punto $(2, 6/5)$.