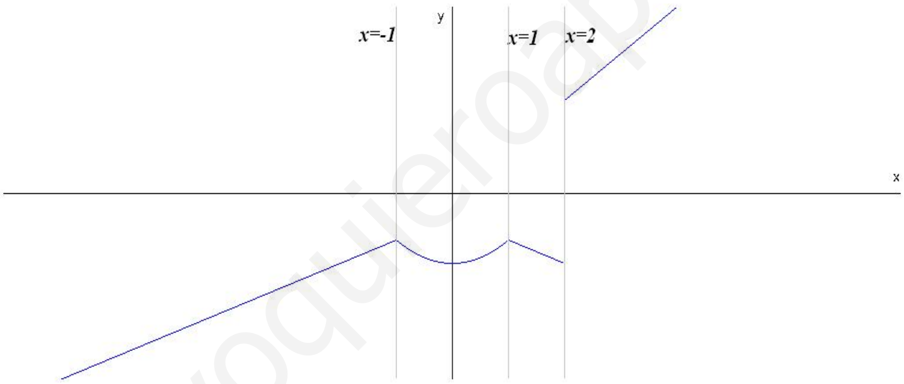
Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2-3 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 7 & \text{si} \quad x = 1 \\ -x-1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - bx + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - ax + 4 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (3ax^2 - bx + 2) = 3a - b + 2$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+}(bx^2 - ax + 4) = b - a + 4$$
$$3a - b + 2 = b - a + 4 \Longrightarrow 2a - b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 6ax - b & \text{si} & x < 1 \\ 2bx - a & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

$$f'(1^-) = 6a - b;\ \ f'(1^+) = 2b - a \Longrightarrow 6a - b = 2b - a \Longrightarrow 7a - 3b = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a - b = 1 \\ 7a - 3b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -3 \\ b = -7 \end{array} \right.$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{ax-3b}{2} & \text{si} & x < -1 \\ 2bx - 1 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{ax-2b}{3} & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{ax - 3b}{2} = \frac{-a - 3b}{2} \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} (2bx - 1) = -2b - 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{-a - 3b}{2} = -2b - 1 \Longrightarrow a - b = 2$$

Continuidad en $x = 1$:

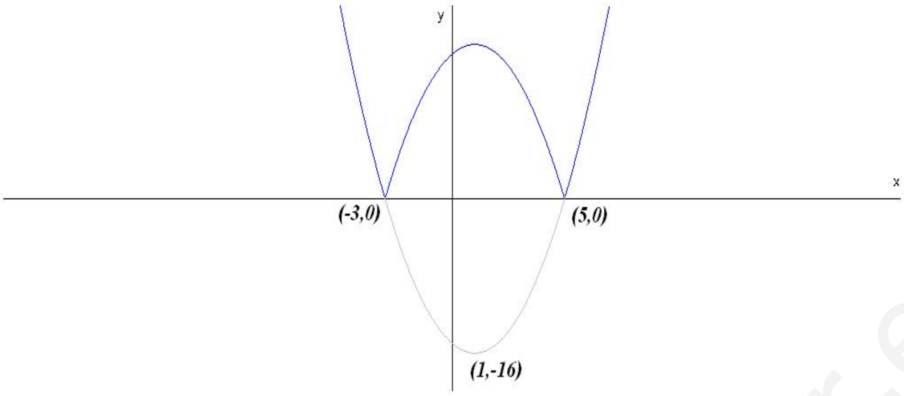
$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (2bx - 1) = 2b - 1 \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{ax - 2b}{3} = \frac{a - 2b}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow 2b - 1 = \frac{a - 2b}{3} \Longrightarrow a - 8b = -3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b = 2 \\ a - 8b = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 19/7 \\ b = 5/7 \end{array} \right.$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 2x - 15|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - 2x - 15 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$:

x	y
0	-15
-3	0
5	0
1	-16



$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(1) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(1, -16)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(1, -16)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 2x - 15 & \text{si} & x \leq -3 \\ -(x^2 - 2x - 15) & \text{si} & -3 < x \leq 5 \\ x^2 - 2x - 15 & \text{si} & 5 \leq x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 2x + 15) = 0$$

$$f(-3) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (-x^2 + 2x + 15) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} (x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x - 2 & \text{si} & x \leq -3 \\ -2x + 2 & \text{si} & -3 < x \leq 5 \\ 2x - 2 & \text{si} & 5 \leq x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -3$: $f'(-3^-) = -8$ y $f'(-3^+) = 8$, luego no es derivable en $x = -3$.
Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -8$ y $f'(5^+) = 8$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{-3, 5\}$.

Problema 5 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = 3ax^2 - 2bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 3)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 4)$.

Solución:

$$f(x) = 3ax^2 - 2bx + c, \quad f'(x) = 6ax - 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 3 \Longrightarrow c = 3 \\ f(2) = 4 \Longrightarrow 12a - 4b + c = 4 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a - 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1/12 \\ b = -1/2 \\ c = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$$