

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Estudiar su curvatura.
- h) Representación gráfica.
- i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

- a) Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- b) Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies 3x = 0 \implies (0, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 0 \implies (0, 0)$.
- c)

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo	-	+

- d) $f(-x) = -f(x) \implies$ IMPAR.
- e) Asíntotas:
 - **Verticales:** No hay, el denominador no se anula nunca.

- **Horizontales:** $y = 0$ ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 4} = 0$
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f) $f'(x) = \frac{3(x^2 - 4)}{(x^2 + 4)^2} = 0 \implies x = \pm 2:$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es creciente en los intervalos $(-2, 2)$ y decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, presenta un mínimo en el punto $(-2, -3/4)$ y un máximo en el $(2, 3/4)$.

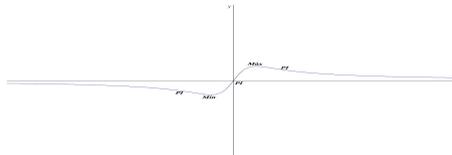
g) $f''(x) = \frac{6x(x^2 - 12)}{(x^2 + 4)^3} = 0 \implies x = 0, x = \pm 2\sqrt{3}.$

	$(-\infty, -2\sqrt{3})$	$(-2\sqrt{3}, 0)$	$(0, 2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3}, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa	cóncava

La función es convexa en $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$ y cóncava en $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$

Tiene los puntos de Inflexión: $(-2\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{8})$, $(0, 0)$ y $(2\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{8})$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$:

Como $f(1) = 3/5$ las rectas pasan por el punto $(1, 3/5)$.

Como $m = f'(1) = \frac{9}{25}$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - \frac{3}{5} = \frac{9}{25}(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal : } y - \frac{3}{5} = -\frac{25}{9}(x - 1)$$

