

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$$

Se pide:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

1. Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
2. Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - x + 4 = 0 \implies$ no tiene solución, luego no hay corte con el eje OX .
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -4 \implies (0, -4)$.
- 3.

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
signo	-	+

4. $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ la función no tiene simetría.
5. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 4}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 4}{x - 1} - x \right) = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x$

6. Monotonía: $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = 0 \implies x = -1, x = 3$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.

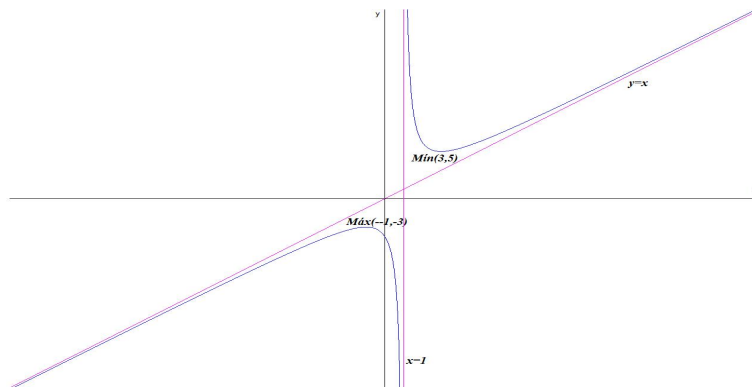
La función tiene un máximo en el punto $(-1, -3)$ y un mínimo en el punto $(3, 5)$.

7. Curvatura: $f''(x) = \frac{8}{(x - 1)^3} \neq 0 \implies$ no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava

Cóncava: $(1, +\infty)$ y Convexa: $(-\infty, 1)$

8. Representación:



9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$:

Como $m = f'(2) = -3$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - 6 = -3(x - 2)$$

$$\text{Recta Normal : } y - 6 = \frac{1}{3}(x - 2)$$

Como $f(2) = 6$ las rectas pasan por el punto $(2, 6)$.

