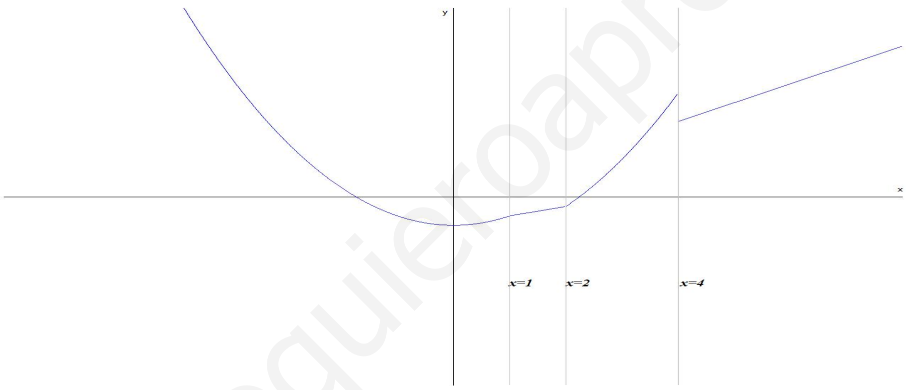
Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcr} x^2-3 & \text{si} & x<1 \\ x-3 & \text{si} & 1\le x<2 \\ x^2-5 & \text{si} & 2<x<4 \\ 2x & \text{si} & 4\le x \end{array} \right.$$

en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y en $x = 4$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = 1$ es continua , en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 3$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} ax^2-2bx+2 & \text{si} & x<1 \\ 2bx^2-5ax+1 & \text{si} & x\ge 1 \end{array} \right.$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (ax^2-2bx+2) = a-2b+2$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (2bx^2-5ax+1) = 2b-5a+1$$

$$a - 2b + 2 = 2b - 5a + 1 \Longrightarrow 6a - 4b = -1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 4bx - 5a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$f'(1^-) = 2a - 2b$; $f'(1^+) = 4b - 5a \Longrightarrow 2a - 2b = 4b - 5a \Longrightarrow 7a - 6b = 0$

$$\begin{cases} 6a - 4b = -1 \\ 7a - 6b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3/4 \\ b = -7/8 \end{cases}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x-1}$, determina

a) Calcula sus asíntotas

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: en $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{(x+2)^2}{x-1} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{(x+2)^2}{x-1} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x+2)^2}{x-1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x + 5$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x+2)^2}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{(x+2)^2}{x-1} - x \right) = 5$$

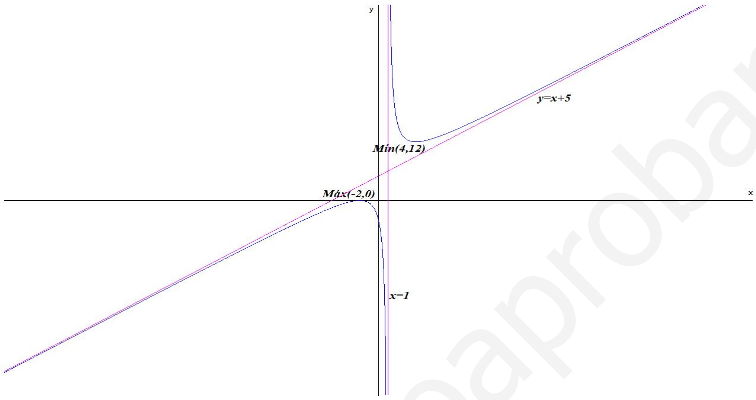
b) Monotonía y extremos:

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x-1}, \quad f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -2, \ x = 4$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,4)$	$(4,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

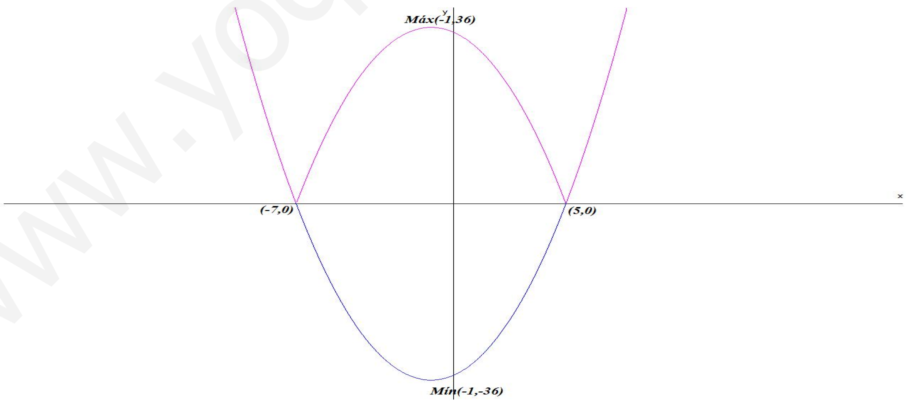
La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$ y decrece en el intervalo $(-2,1)\cup(1,4)$

La función tiene un máximo en el punto $(-2,0)$ y un mínimo en el punto $(4,12)$.



Problema 4 Estudiar la continuidad de la función $f(x)=|x^2+2x-35|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x)=x^2+3x-18 \Longrightarrow g'(x)=2x+2=0 \Longrightarrow x=-1$:



x	y
0	-35
-7	0
5	0
-1	-36

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(-1) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(-1, -36)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(-1, 36)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 35 & \text{si} \quad x \le -7 \\ -(x^2 + 2x - 35) & \text{si} \quad -7 < x \le 5 \\ x^2 + 2x - 35 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = -7$:

$$\lim_{x \longrightarrow -7^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -7^-} (x^2 + 2x - 35) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -7^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -7^+} (-x^2 - 2x + 35) = 0$$

$$f(-7) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (-x^2 - 2x + 35) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} (x^2 + 2x - 35) = 0$$

$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x \le -7 \\ -2x - 2 & \text{si} \quad -7 < x \le 5 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -7$: $f'(-7^-) = -12$ y $f'(-7^+) = 12$, luego no es derivable en $x = -7$.
Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -9$ y $f'(5^+) = 9$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{-7, 5\}$.

Problema 5 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = 5ax^2 - 2bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 4)$.

Solución:

$$f(x) = 5ax^2 - 2bx + c, \quad f'(x) = 10ax - 2b$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \\ f(3) = 4 \Longrightarrow 45a - 6b + c = 4 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 30a - 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -2/45 \\ b = -2/3 \\ c = 2 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = -\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$$