

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$
- Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x - 1 = 0 \implies (1, 0)$.
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = 1/4 \implies (0, 1/4)$.
-

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
signo	-	+	-	+

- $f(-x) \neq f(x) \implies$ la función no tiene simetría.
- Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2-4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x^2-4} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x^2-4} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x^2-4} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-1}{x^2-4} = \left[\frac{-3}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x^2-4} = \left[\frac{-3}{0^-} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2-4} = 0$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

f)

$$f'(x) = -\frac{x^2-2x+4}{(x^2-4)^2} \neq 0 \implies \text{No hay extremos}$$

Como $f'(x) < 0 \implies$ la función decrece en $R - \{\pm 2\}$

g)

$$f''(x) = \frac{2(x^3-3x^2+12x-4)}{(x^2-4)^3} = 0 \implies x = 0, 36$$

Luego la función si tiene puntos de inflexión.

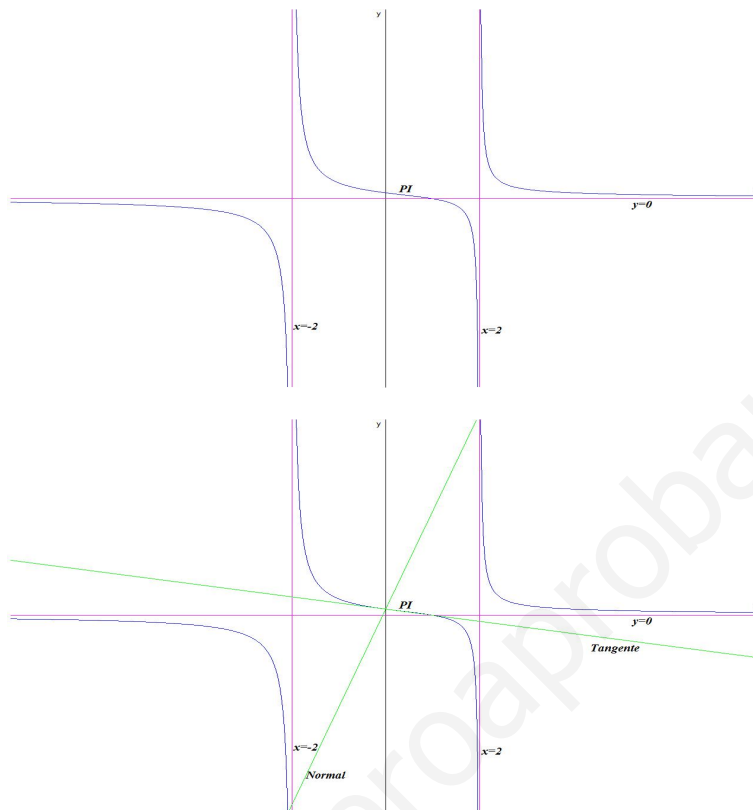
	$(-\infty, -2)$	$(-2; 0, 36)$	$(0, 36; 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava: $(-2; 0, 36) \cup (2, +\infty)$

Convexa: $(-\infty, -2) \cup (0, 36; 2)$

Tiene un punto de inflexión en $(0, 36; 0, 16)$

h) Representación:



- i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$:

Como $m = f'(0) = 1/4$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}x$$

$$\text{Recta Normal : } y - \frac{1}{4} = 4x$$

Como $f(0) = 1/4$ las rectas pasan por el punto $(0, 1/4)$.