

**Problema 1** Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

Se pide:

- a) Calcular su dominio.
- b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- c) Calcular su signo.
- d) Calcular su simetría.
- e) Calcular sus asíntotas.
- f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- g) Representación gráfica.
- h) Calcular las rectas tangente y normal a  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .

**Solución:**

- a) Dominio de  $f$ :  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- b) Puntos de Corte
  - Corte con el eje  $OX$  hacemos  $f(x) = 0 \implies x^2 + 3 = 0 \implies$  No hay puntos de corte con  $OX$ .
  - Corte con el eje  $OY$  hacemos  $x = 0 \implies f(0) = -3 \implies (0, -3)$ .
- c)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
signo	-	+

- d)  $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$  la función no tiene simetrías.
- e) Asíntotas:

- **Verticales:**  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[ \frac{4}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[ \frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \infty$$

- **Oblicuas:**  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 3}{x - 1} - x \right) = 1$$

Luego la asíntota oblicua es  $y = x + 1$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = 0 \implies x = -1, x = 3$$

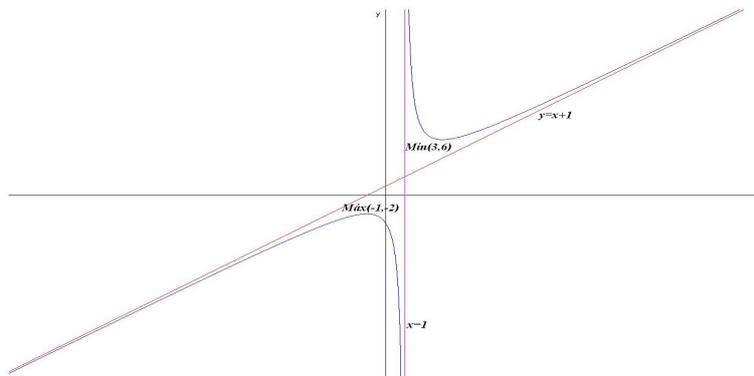
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ .

La función es decreciente en el intervalo  $(-1, 1) \cup (1, 3)$ .

La función tiene un máximo en el punto  $(-1, -2)$  y un mínimo en  $(3, 6)$ .

g) Representación:



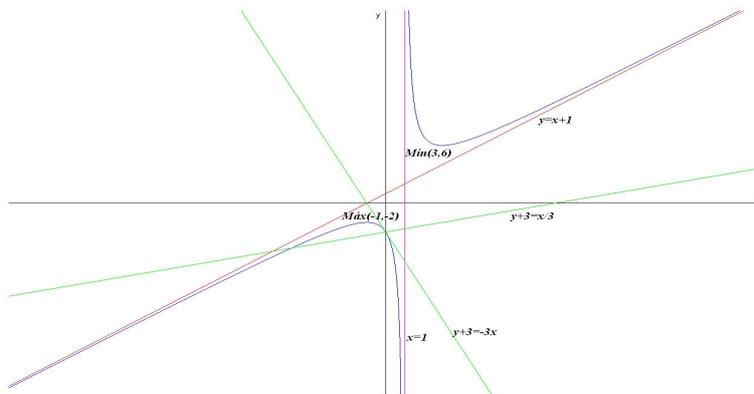
h) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$ :

Como  $m = f'(1) = -3$  tenemos que

$$\text{Recta Tangente : } y + 3 = -3x$$

$$\text{Recta Normal : } y + 3 = \frac{1}{3}x$$

Como  $f(0) = -3$  las rectas pasan por el punto  $(0, -3)$ .



**Problema 2** Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

- a)  $y = e^{3x^2+5x-1}$
- b)  $y = \ln(3x^2 + 1)$
- c)  $y = (x^2 + 3)(x^3 + 5)$
- d)  $y = (3x^2 + 5)^{15}$

$$e) y = \frac{4x^2 - 1}{x^2 + 2}$$

**Solución:**

$$a) y = e^{3x^2+5x-1} \implies y' = (6x + 5)e^{3x^2+5x-1}$$

$$b) y = \ln(3x^2 + 1) \implies y' = \frac{6x}{3x^2 + 1}$$

$$c) y = (x^2 + 3)(x^3 + 5) \implies y' = 2x(x^3 + 5) + (x^2 + 3)(3x^2)$$

$$d) y = (3x^2 + 5)^{15} \implies y' = 15(3x^2 + 5)^{14}(6x)$$

$$e) y = \frac{4x^2 - 1}{x^2 + 2} \implies y' = \frac{8x(x^2 + 2) - (4x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 2)^2}$$

**Problema 3** Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5 + 2x^3 - 7x + 2}{x^2 + x - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - x + 3}{-x^2 + x + 2}$$

**Solución:**

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^5 + 2x^3 - 7x + 2}{x^2 + x - 2} = \frac{14}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x^2 - x + 3}{-x^2 + x + 2} = -\infty$$