EJEMPLOS. NÚEMROS REALES. ÁLGEBRA

Ejercicio nº 1.-

Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{\dfrac{48}{75}} \cdot \sqrt{2}$

b) $\sqrt{108} - \sqrt{147}$

c) $\dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

Solución:

a) $\sqrt{\dfrac{48}{75}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\dfrac{48 \cdot 2}{75}} = \sqrt{\dfrac{2^4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 5^2}} = \dfrac{4}{5}\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}$

b) $\sqrt{108} - \sqrt{147} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} - \sqrt{3 \cdot 7^2} = 6\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

c) $\dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\left(2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{6 + \sqrt{18}}{3} = \dfrac{6 + \sqrt{2 \cdot 3^2}}{3} = \dfrac{6 + 3\sqrt{2}}{3} = 2 + \sqrt{2}$

Ejercicio nº 2.-

Tres socios invierten 20, 40 y 60 miles de euros, respectivamente, en un negocio. Al cabo de un tiempo obtienen 18 000 euros de beneficio. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Solución:

Entre los tres socios invierten 20 + 40 + 60 = 120 miles de euros.

Por cada mil euros invertidos corresponden 18 000 : 120 000 = 0,15 euros de beneficio.

$0{,}15 \cdot 20 = 3$ ® 3 000 euros le corresponden al primero.
$0{,}15 \cdot 40 = 6$ ® 6 000 euros le corresponden al segundo.
$0{,}15 \cdot 60 = 9$ ® 9 000 euros le corresponden al tercero.

Ejercicio nº 3.-

Factoriza el polinomio:

$$\boldsymbol{x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x}$$

Solución:

Sacamos factor común:

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = x\left(x^3 + x^2 - 9x - 9\right)$$

	1	1	–9	–9
3		3	12	9
	1	4	3	0
–3		–3	–3	
	1	1	0	

$$x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x = x(x-3)(x+3)(x+1)$$

Ejercicio nº 4.-

Efectúa estas operaciones y simplifica:

$$\boldsymbol{\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2+x}}$$

Solución:

$$\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2+x} = \frac{(x+1)^2}{x^2+x} - \frac{x^2}{x^2+x} - \frac{2x+2}{x^2+x} = \frac{x^2+2x+1-x^2-2x-2}{x^2+x} = \frac{-1}{x^2+x}$$

Ejercicio nº 5.-

Resuelve:

a) $(x-1)(x+1)=-1$

b) $\frac{x}{x+1}-\frac{16}{6}=\frac{x+1}{x}$

Solución:

a) $(x-1)(x+1)=-1$

$x^2-1=-1 \;\rightarrow\; x^2=0 \;\rightarrow\; x=0$

b) $\frac{x}{x+1}-\frac{16}{6}=\frac{x+1}{x}$

$$\frac{6x^2}{6x(x+1)}-\frac{16x(x+1)}{6x(x+1)}=\frac{6(x+1)^2}{6x(x+1)}$$

$$6x^2-16x^2-16x=6\left(x^2+2x+1\right)$$

$$6x^2-16x^2-16x=6x^2+12x+6$$

$$-16x^2-28x-6=0$$

$$16x^2+28x+6=0 \rightarrow 8x^2+14x+3=0$$

$$x=\frac{-14\pm\sqrt{196-96}}{16}=\frac{-14\pm\sqrt{100}}{16}=\frac{-14\pm 10}{16} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=\frac{-4}{16}=\frac{-1}{4} \\ x=\frac{-24}{16}=\frac{-3}{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones $x_1=\frac{-1}{4};\quad x_2=\frac{-3}{2}$

Ejercicio nº 6.-

Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=2 \\ 3(x-2)+y=8 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{3x}-2y=1 \\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{2y-1}{2}=1 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=2 \\ 3(x-2)+y=8 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \dfrac{5x}{15}+\dfrac{3y}{15}=\dfrac{30}{15} \\ 3x-6+y=8 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 5x+3y=30 \\ 3x+y=14 \end{array}\right\}$

Despejamos de la segunda ecuación:

$y=14-3x$

Sustituimos en la primera ecuación:

$5x+3(14-3x)=30 \ \to \ 5x+42-9x=30 \ \to \ -4x=-12 \ \to \ x=3$

$y=14-3x=14-9=5$

La solución es: $x = 3$; $y = 5$

b) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{3x}-2y=1 \\ x-3(2y-1)=6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} \sqrt{3x}-2y=1 \\ x-6y+3=6 \end{array}\right\} \to$

$\to \left.\begin{array}{l} \sqrt{3x}-2y=1 \\ x-6y=3 \end{array}\right\}$

Despejamos x en la 2.ª ecuación: $x = 3 + 6y$

Sustituimos en la primera:

$\sqrt{3(3+6y)}-2y=1 \ \to \ \sqrt{9+18y}-2y=1 \ \to \ \sqrt{9+18y}=1+2y \ \to$

$\left(\sqrt{9+18y}\right)^2=(1+2y)^2 \ \to \ 9+18y=1+4y+4y^2 \ \to \ 4y^2-14y-8=0 \ \to$

$\to \ 2y^2-7y-4=0$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} = \begin{cases} -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación $x = 3 + 6y$:

- Si $y = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 3 - \frac{6}{2} = 3 - 3 = 0$
- Si $y = 4 \rightarrow x = 3 + 24 = 27$

Comprobamos las soluciones obtenidas en la primera ecuación, $\sqrt{3x} - 2y = 1$:

- $x = 0,\ y = -\frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{0} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ Válida.
- $x = 27,\ y = 4 \rightarrow \sqrt{81} - 8 = 9 - 8 = 1$ Válida.

Las soluciones son:

$x_1 = 0,\ y_1 = -\frac{1}{2}; \qquad x_2 = 27,\ y_2 = 4$

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

Hemos comprado un pantalón y una camiseta por 44,1 euros. El pantalón tenía un 15% de descuento y la camiseta estaba rebajada un 10%. Si no tuvieran ningún descuento, habríamos tenido que pagar 51 euros. ¿Cuánto nos ha costado el pantalón y cuánto la camiseta?

Solución:

Llamamos x al precio del pantalón sin el descuento e y al precio de la camiseta sin descuento. Así:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 51 \\ 0{,}85x + 0{,}9y = 44{,}1 \end{array}\right\} \rightarrow y = 51 - x$$

$$0{,}85x + 0{,}9y = 44{,}1 \rightarrow 0{,}85x + 0{,}9(51 - x) = 44{,}1 \rightarrow 0{,}85x - 0{,}9x = 44{,}1 - 45{,}9 \rightarrow$$
$$\rightarrow -0{,}05x = -1{,}8 \rightarrow x = 36$$

$$y = 51 - x = 51 - 36 = 15$$

El pantalón costaba 36 euros y la camiseta 15 euros, sin los descuentos.

Por tanto, el precio del pantalón (con descuento) ha sido de:

36 · 0,85 = 30,6 euros

y el de la camiseta (con descuento) ha sido de:
15 · 0,9 = 13,5 euros

Ejercicio nº 8.-

Resuelve e interpreta gráficamente la siguiente inecuación:

$$x^2 - 4 \leq 0$$

Solución:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \to \quad x^2 = 4 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{4} \quad \to \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

La parábola $y = x^2 - 4$ corta al eje x en $x = -2$ y en $x = 2$.

En el intervalo [-2, 2] toma valores negativos o nulos. Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo [-2, 2]: