EJERCICIOS RESUELTOS DE LOGARITMOS

1. Calcular el valor de x, aplicando la definición de logaritmo:

a) $x = \log_4 64$ **b)** $x = \log_3 \frac{1}{27}$ **c)** $x = \log_3 81$ **d)** $x = \log_2 2\sqrt{2}$ **e)** $\log_x 125 = -3$ **f)** $\log_2(4x) = 3$

Solución

El logaritmo de un número es el número al que hay que elevar la base para obtenerlo, es decir,

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

a) $x = \log_4 64 \Leftrightarrow 4^x = 64$. Como $64 = 4^3$, se tiene $4^x = 4^3$ y por tanto $x = 3$.

b) $x = \log_3 \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{27}$. Como $\frac{1}{27} = 3^{-3}$, se tiene $3^x = 3^{-3}$ y por tanto $x = -3$.

c) $x = \log_3 81 \Leftrightarrow 3^x = 81$. Como $81 = 3^4$, se tiene $3^x = 3^4$ y por tanto $x = 4$.

d) $x = \log_2 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^x = 2\sqrt{2}$, Como $2\sqrt{2} = 2.2^{1/2} = 2^{3/2}$, se tiene $2^x = 2^{3/2}$ y por tanto $x = \frac{3}{2}$.

e) $\log_x 125 = -3 \Leftrightarrow x^{-3} = 125 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} = 125 \Leftrightarrow \frac{1}{125} = x^3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

f) $\log_2(4x) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 4x \Leftrightarrow x = 2$

2. Determinar la parte entera del número $x = \log_2 11$.

Solución

Para determinar la parte entera se buscan las potencias de 2 entre las que se encuentra el número 11, estas son 2^3 y 2^4, es decir, se verifica $2^3 < 11 < 2^4$.

Tomando logaritmos en base 2 se mantiene la desigualdad, ya que la base es mayor que 1, así $\log_2 2^3 < \log_2 11 < \log_2 2^4$, es decir, $3 < \log_2 11 < 4$, de donde se deduce que la parte entera de $\log_2 11$ es igual a 3.

3. Sabiendo que $\log_{10} 4 \simeq 0{'}60206$ calcular una aproximación de los siguientes valores:

a) $\log_{10} 2$ **b)** $\log_{10} \frac{1}{4}$ **c)** $\log_{10} 0{'}2$ **d)** $\log_{10} 4000$

Solución

Se aplican propiedades de los logaritmos para escribir los valores en función de $\log_{10} 4$.

a) $\log_{10} 2 = \log_{10} \sqrt{4} = \log_{10} 4^{1/2} = \frac{1}{2}\log_{10} 4 \simeq \frac{1}{2}\, 0{'}60206 = 0{'}30103$

b) $\log_{10} \frac{1}{4} = \log_{10} 4^{-1} = -\log_{10} 4 \simeq -0{'}60206$

c) $\log_{10} 0{'}2 = \log_{10} \frac{2}{10} = \log_{10} 2 - \log_{10} 10 \simeq 0{'}30103 - 1 = -0{'}69897$

d) $\log_{10} 4000 = \log_{10}(4.1000) = \log_{10} 4 + \log_{10} 1000 = \log_{10} 4 + \log_{10} 10^3 \simeq 0{'}60206 + 3 =$
$= 3{'}60206$

4. Conocidos $\ln a = 0´6$ y $\ln b = 2´4$ calcular:

a) $\ln\sqrt{a}$ **b)** $\ln\sqrt[4]{b}$ **c)** $\ln\sqrt{ab}$ **d)** $\ln\sqrt[3]{\dfrac{ab}{e^2}}$ **e)** $\ln\dfrac{\sqrt{a^{-3}}}{\sqrt[3]{b^2}}$

Solución

a) $\ln\sqrt{a} = \ln a^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ln a = \dfrac{1}{2}.0´6 = 0´3$

b) $\ln\sqrt[4]{b} = \ln b^{1/4} = \dfrac{1}{4}\ln b = \dfrac{1}{4}.2´4 = 0´6$

c) $\ln\sqrt{ab} = \ln(ab)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ln(ab) = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \dfrac{1}{2}(0´6 + 2´4) = \dfrac{1}{2}3 = 1´5$

d) $\ln\sqrt[3]{\dfrac{ab}{e^2}} = \ln\left(\dfrac{ab}{e^2}\right)^{1/3} = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{ab}{e^2} = \dfrac{1}{3}(\ln(ab) - \ln e^2) = \dfrac{1}{3}(\ln a + \ln b - 2) = \dfrac{1}{3}(0´6 + 2´4 - 2) = \dfrac{1}{3}$

e) $\ln\dfrac{\sqrt{a^{-3}}}{\sqrt[3]{b^2}} = \ln\sqrt{a^{-3}} - \ln\sqrt[3]{b^2} = \ln a^{-3/2} - \ln b^{2/3} = \dfrac{-3}{2}\ln a - \dfrac{2}{3}\ln b = \dfrac{-3}{2}0´6 - \dfrac{2}{3}2´4 = -2´5$

5. Sabiendo que $\log_{10} 3 \simeq 0´4771$ resolver las siguientes ecuaciones:

a) $10^{x+4} = 30$ **b)** $\log_{10} 0´03 = x - 1$

Solución

a) Para despejar x de la ecuación $10^{x+4} = 30$, se toman logaritmos decimales en ambos miembros de la ecuación, quedando $x + 4 = \log_{10} 30$, de donde se tiene:

$$x = -4 + \log_{10} 30 = -4 + \log_{10}(3.10) = -4 + \log_{10} 3 + \log_{10} 10 \simeq -4 + 0´4771 + 1 = -2´5229$$

b) Despejando x de la ecuación $\log_{10} 0´03 = x - 1$ y realizando operaciones, se obtiene:

$$x = 1 + \log_{10} 0´03 = 1 + \log_{10}\frac{3}{100} = 1 + \log_{10} 3 - \log_{10} 100 =$$
$$= 1 + 0´4771 - \log_{10} 10^2 \simeq 1´4771 - 2 = -0´5229$$

6. Resolver las siguientes ecuaciones: **a)** $e^{x+2} = \sqrt{e}$ **b)** $\log_{10} 16 - 2\log_{10} x = \log_{10} 100$

Solución

a) La ecuación $e^{x+2} = \sqrt{e}$ se puede escribir $e^{x+2} = e^{1/2}$. Para despejar x se toman logaritmos neperianos en ambos miembros, quedando $x + 2 = \dfrac{1}{2}$, de donde $x = -2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-3}{2}$

b) Aplicando propiedades de los logaritmos en el primer miembro de $\log_{10} 16 - 2\log_{10} x = \log_{10} 100$ se obtiene:

$$\log_{10} 16 - 2\log_{10} x = \log_{10} 16 - \log_{10} x^2 = \log_{10}\frac{16}{x^2}$$

Por tanto, la ecuación queda $\log_{10}\dfrac{16}{x^2} = \log_{10} 100$, de donde $\dfrac{16}{x^2} = 100$, es decir, $\dfrac{16}{100} = x^2$, cuyas soluciones son $x = \pm\dfrac{2}{5}$.

El valor $x = \dfrac{-2}{5}$ no es solución de la ecuación inicial, ya que no existe el logaritmo de un número negativo, por tanto, la única solución es $x = \dfrac{2}{5}$.