EXAMEN DE MATEMÁTICAS APLICADAS I

Temas 9 y 10

1. (0,6 puntos) Para las sucesiones numéricas que se indican halla los dos términos siguientes, a_5 y a_6.

a) 1/2, 1, 3/2, 2,… b) 2, 6, 18, 54,… c) 1, 4, 9, 16,…

(0,9 puntos) Da también la expresión del término general de cada una de ellas.

2. De una progresión aritmética se sabe que $a_6 = 9$ y $d = 0{,}8$. Halla:

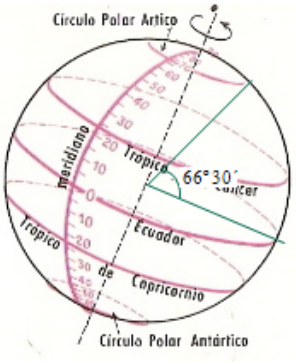
a) (0,7 puntos) Los términos a_1 y a_{150}.

b) (0,8 puntos) La suma de los 150 primeros términos.

3. (1,5 puntos) Si se aportan 3000 € anuales a un plan de ahorro, durante 8 años y a un 6% de interés anual, ¿cuánto dinero tendrá el depositante al final de ese periodo de tiempo?
Aclaración: Puede suponerse que los ingresos se hacen el día 1 de enero, desde 2015 a 2022; y que el dinero se retira el día 31 de diciembre de 2022.

4. (1,5 puntos) Un plan de pensiones tiene las siguientes características:
Aportación mensual de 50 euros. Interés anual: 4 % Tiempo: 15 años.
¿Cuánto dinero tendrá acumulado un suscriptor de dicho plan?

Dato: $C = \dfrac{M(1+r)\left[(1+r)^{12t} - 1\right]}{r}$



5. (1,5 puntos) Calcula la longitud del paralelo correspondiente al Círculo Polar Ártico, si su latitud es 66º 30´ N.
(Puedes tomar el radio de la Tierra R = 6370 km.)

6. a) (0,4 puntos) ¿Cuántos radianes son 60º, 90º, 180º y 240º?

b) (0,2 puntos) ¿Cuántos grados son π/4 y 5π/3 radianes?

c) (0,9 puntos) Resuelve las ecuaciones:

$\sin x = -1/2$; $\cos 2x = 0{,}8$; $3\tan x = 6$

7. (1 punto) A 40 m del pie de una torre se mide el ángulo de elevación hasta el punto más alto de la torre. Si ese ángulo mide 36º, ¿cuál es la altura de la torre?

Alcalá de Henares, 12 de marzo de 2015. JoséMMM

Soluciones

1. (0,6 puntos) Para las sucesiones numéricas que se indican halla los dos términos siguientes, a_5 y a_6.

a) 1/2, 1, 3/2, 2,… b) 2, 6, 18, 54,… c) 1, 4, 9, 16,…

(0,9 puntos) Da también la expresión del término general de cada una de ellas.

Solución:

a) Progresión aritmética de diferencia d = 1/2 → a_5 = 5/2; a_6 = 3.

→ $a_n = 0,5n$

b) Progresión geométrica de razón r = 3 → a_5 = 54 · 3 = 162; a_6 = 162 · 3 = 486.

→ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

c) Es la sucesión de cuadrados de los números naturales → a_5 = 5^2 = 25; a_6 = 6^2 = 36.

→ $a_n = n^2$

2. De una progresión aritmética se sabe que $a_6 = 9$ y d = 0,8. Halla:

a) (0,7 puntos) Los términos a_1 y a_{150}.

b) (0,8 puntos) La suma de los 150 primeros términos.

Solución:

a) $a_1 = a_6 - 5d = 9 - 5 \cdot 0,8 = 5$.

$a_{150} = a_1 + 149d = 5 + 149 \cdot 0,8 = 5 + 119,2 = 124,2$.

b) $S_{150} = \dfrac{(a_1 + a_{150}) \cdot 150}{2} = \dfrac{(5 + 124,2) \cdot 150}{2} = 9690$.

3. (1,5 puntos) Si se aportan 3000 € anuales a un plan de ahorro, durante 8 años y a un 6% de interés anual, ¿cuánto dinero tendrá el depositante al final de ese periodo de tiempo?

Aclaración: Puede suponerse que los ingresos se hacen el día 1 de enero, desde 2015 a 2022; y que el dinero se retira el día 31 de diciembre de 2022.

Solución:

Un 6% anual equivale a $r = 0,06$.

Por tanto, los términos de la progresión que hay que sumara son:

$$a_1 = 3000 \cdot (1 + 0,6)^8 = 3000 \cdot 1,06^8,\ a_2 = 3000 \cdot 1,06^7,\ a_3 = 3000 \cdot 1,06^6 \ldots\ a_8 = 3000 \cdot 1,06$$

Su suma es:

$$3000 \cdot \left(1,06^8 + 1,06^7 + \ldots + 1,06\right) = 3000 \cdot \frac{1,06^8 \left(1,06^{-8} - 1\right)}{1,06^{-1} - 1} = 3000 \cdot 10,4913 = 31473,9 \text{ €}.$$

(El paréntesis es una progresión geométrica de razón r = $1,06^{-1}$. Recuérdese que la suma de una progresión geométrica es $S = \dfrac{a_1 \left(r^n - 1\right)}{r - 1}$).

Observación: Si la suma se hace de derecha a izquierda, la razón será r = 1,06 y su expesión:

$$S = 3000 \cdot \frac{1,06 \left(1,06^8 - 1\right)}{1,06 - 1} = 3000 \cdot 10,4913 = 31473,9$$

4. (1,5 puntos) Un plan de pensiones tiene las siguientes características:
Aportación mensual de 50 euros. Interés anual: 4 % Tiempo: 15 años.
¿Cuánto dinero tendrá acumulado un suscriptor de dicho plan?

Dato: $C = \dfrac{M(1+r)\left[(1+r)^{12t}-1\right]}{r}$

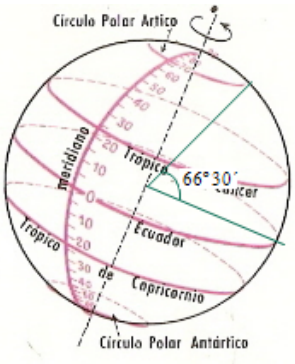
Solución:

M es la aportación mensual: $M = 50$; $r = \dfrac{0,04}{12} = 0,00333\ldots$; $t = 15$.

Por tanto:

$$C = \frac{50 \cdot 1,00333\left[(1,00333)^{12 \cdot 15}-1\right]}{0,00333} = \frac{50 \cdot 1,00333 \cdot 0,8203}{0,00333} = 12357,86 \text{ €}$$

5. (1,5 puntos) Calcula la longitud del paralelo correspondiente al Círculo Polar Ártico, si su latitud es 66º 30´ N.
(Puedes tomar el radio de la Tierra R = 6370 km.)



Solución:
Si el radio correspondiente al paralelo del Círculo Polar Ártico es r, se tiene:

$$\cos(66^\circ 30') = \frac{r}{6370} \Rightarrow r = \cos 66,5^\circ \cdot 6370 = 2540,032 \text{ km}$$

Su longitud será: $L = 2\pi \cdot 2540,032 = 15959,489$ km.

6. a) (0,4 puntos) ¿Cuántos radianes son 60º, 90º, 180º y 240º?
b) (0,2 puntos) ¿Cuántos grados son π/4 y 5π/3 radianes?
c) (0,9 puntos) Resuelve las ecuaciones:

$$\sin x = -1/2; \quad \cos 2x = 0,8; \quad 3\tan x = 6$$

Solución:
a) 180º = π radianes, luego: 60º = π/3; 90º = π/2; 180º = π y 240º = 4π/3.
b) π/4 = 45º y 5π/3 = 300º.

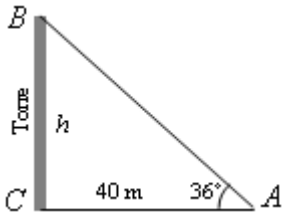
c) $\sin x = -1/2 \Rightarrow x = \arcsin(-1/2) = \begin{cases} 210 + k \cdot 360^\circ \\ 330^\circ + k \cdot 360 \end{cases}$;

$$\cos 2x = 0,8 \Rightarrow 2x = \arccos 0,8 = \begin{cases} 36,87^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 323,13^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 18,435^\circ + k \cdot 180^\circ \\ 161,565^\circ + k \cdot 180^\circ \end{cases}$$

$$3\tan x = 6 \Rightarrow \tan x = 2 \Rightarrow x = \arctan 2 = 63,43 + k \cdot 180^\circ$$

7. (1 punto) A 40 m del pie de una torre se mide el ángulo de elevación hasta el punto más alto de la torre. Si ese ángulo mide 36º, ¿cuál es la altura de la torre?

Solución:
Para hallar la altura de la torre se observa:



$$\tan 36^\circ = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 40 \cdot \tan 36^\circ = 40 \cdot 0,7265 = 29,06$$

metros.