

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

Pág. 7

$$c) \begin{array}{r|ccccc} & 1 & -7 & 5 & 0 & -13 \\ -1 & & -1 & 8 & -13 & 13 \\ \hline & 1 & -8 & 13 & -13 & \boxed{0} \end{array}$$

P_3 es divisible por $x + 1$. No puede ser divisible por $x - 3$ porque 13 no es múltiplo de 3.

PÁGINA 54

- 15** □□□ El polinomio $x^4 - 2x^3 - 23x^2 - 2x - 24$ es divisible por $x - a$ para dos valores enteros de a . Búscalos y da el cociente en ambos casos.

$$\begin{array}{r|ccccc} & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ -4 & & -4 & 24 & -4 & 24 \\ \hline & 1 & -6 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

Es divisible por $x + 4$.

COCIENTE: $x^3 - 6x^2 + x - 6$

$$\begin{array}{r|ccccc} & 1 & -2 & -23 & -2 & -24 \\ 6 & & 6 & 24 & 6 & 24 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Es divisible por $x - 6$.

COCIENTE: $x^3 + 4x^2 + x + 4$

- 16** □□□ Prueba si el polinomio $-x^4 + 3x^2 - 16x + 6$ es divisible por $x - a$ para algún valor entero de a .

$$\begin{array}{r|ccccc} & -1 & 0 & 3 & -16 & 6 \\ -3 & & 3 & -9 & 18 & -6 \\ \hline & -1 & 3 & -6 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Es divisible por $x + 3$.

- 17** □□□ Si $P(x) = 3x^3 - 11x^2 - 81x + 245$, halla los valores $P(8,75)$, $P(10,25)$ y $P(-7)$ con ayuda de la calculadora.

Describe el proceso como en el ejemplo:

8.75 [Min]

3 [×] [MR] [−] 11 [=] [×] [MR] [−] 81 [=] [×] [MR] [+] 245 [=] 103.828

$P(8,75) = 703,828\dots$

10,25 [Min] 3 [×] [MR] [−] 11 [=] [×] [MR] [−] 81 [=] [×] [MR] [+] 245 [=] 1489,7347...

$P(10,25) = 1489,73$

7 [+/-] [Min] 3 [×] [MR] [−] 11 [=] [×] [MR] [−] 81 [=] [×] [MR] [+] 245 [=] -756

$P(-7) = -756$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

Pág. 8

Factorización de polinomios

18 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 4x - 5$

b) $x^2 + 8x + 15$

c) $7x^2 - 21x - 280$

d) $3x^2 + 9x - 210$

a) $x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -5, x = 1$

$x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0 \rightarrow x = -5, x = -3$

$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$

c) $7x^2 - 21x - 280 = 0 \rightarrow x = 8, x = -5$

$7x^2 - 21x - 280 = 7(x - 8)(x + 5)$

d) $3x^2 + 9x - 210 = 0 \rightarrow x = -10, x = 7$

$3x^2 + 9x - 210 = 3(x + 10)(x - 7)$

19 Busca, en cada caso, una raíz entera y factoriza, después, el polinomio:

a) $2x^2 - 9x - 5$

b) $3x^2 - 2x - 5$

c) $4x^2 + 17x + 15$

d) $-x^2 + 17x - 72$

a) $2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1)$

b) $3x^2 - 2x - 5 = (x + 1)(3x - 5)$

c) $4x^2 + 17x + 15 = (x + 3)(4x + 5)$

d) $-x^2 + 17x - 72 = -(x - 8)(x - 9)$

20 Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $3x^3 - 12x$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x$

c) $45x^2 - 5x^4$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3$

e) $x^6 - 16x^2$

f) $16x^4 - 9$

a) $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 3x(x + 2)(x - 2)$

b) $4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2$

c) $45x^2 - 5x^4 = 5x^2(9 - x^2) = 5x^2(3 + x)(3 - x)$

d) $x^4 + x^2 + 2x^3 = x^2(x^2 + 1 + 2x) = x^2(x + 1)^2$

e) $x^6 - 16x^2 = x^2(x^4 - 16) = x^2(x^2 + 4)(x^2 - 4) = x^2(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

f) $16x^4 - 9 = (4x^2 + 3)(4x^2 - 3) = (4x^2 + 3)(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$

21 Completa la descomposición en factores de los polinomios siguientes:

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9)$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40)$

a) $(x^2 - 25)(x^2 - 6x + 9) = (x + 5)(x - 5)(x - 3)^2$

b) $(x^2 - 7x)(x^2 - 13x + 40) = x(x - 7)(x - 8)(x - 5)$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

Pág. 9

22 Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $3x^3 - 15x^2 + 12x$

c) $x^3 - 9x^2 + 15x - 7$

d) $x^4 - 13x^2 + 36$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|cccc|} \hline & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & | 0 \\ -1 & & -1 & -2 & \\ \hline & 1 & 2 & | 0 & \end{array} \end{array}$$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

Sus raíces son 1, -1 y -2.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|ccc|} \hline & 3 & -15 & 12 \\ \hline 1 & & 3 & -12 \\ \hline & 3 & -12 & | 0 \\ 4 & & 12 & \\ \hline & 3 & | 0 & \end{array} \end{array}$$

$$3x^3 - 15x^2 + 12x = 3x(x - 1)(x - 4)$$

Sus raíces son 0, 1 y 4.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|cccc|} \hline & 1 & -9 & 15 & -7 \\ \hline 1 & & 1 & -8 & 7 \\ \hline & 1 & -8 & 7 & | 0 \\ 1 & & 1 & -7 & \\ \hline & 1 & -7 & | 0 & \end{array} \end{array}$$

$$x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = (x - 1)^2(x - 7)$$

Sus raíces son 1 y 7.

d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow x = 2; x = -2; x = 3; x = -3$

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$$

Sus raíces son 2, -2, 3 y -3.

23 Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

b) $2x^3 - 7x^2 - 19x + 60$

c) $x^3 - x - 6$

d) $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|cccc|} \hline & 1 & -2 & -2 & -3 \\ \hline 3 & & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & | 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x^2 + x + 1)$$

Raíz: 3

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|ccccc|} \hline & 2 & -7 & -19 & 60 \\ \hline -3 & & -6 & 39 & -60 \\ \hline & 2 & -13 & 20 & | 0 \\ 4 & & 8 & -20 & \\ \hline & 2 & -5 & | 0 & \end{array} \end{array}$$

$$2x^3 - 7x^2 - 19x + 60 = (x + 3)(x - 4)(2x - 5)$$

Raíces: -3, 4 y $\frac{5}{2}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|cccc|} \hline & 1 & 0 & -1 & -6 \\ \hline 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & | 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

Raíz: 2

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

Pág. 10

d)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{r|ccccc} & 4 & 4 & -3 & -4 & -1 \\ 1 & & 4 & 8 & 5 & 1 \\ \hline & 4 & 8 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & & -4 & -4 & -1 & \\ \hline & 4 & 4 & 1 & 0 & \end{array} \end{array}$$

$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 =$
 $= (x - 1)(x + 1)(4x^2 + 4x + 1) =$
 $= (x - 1)(x + 1)(2x + 1)^2$

Raíces: 1, -1 y $-\frac{1}{2}$

Fracciones algebraicas

24 Comprueba, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:

a) $\frac{x-4}{3x-12}$ y $\frac{1}{3}$

b) $\frac{x^2+x}{2x}$ y $\frac{x}{2}$

c) $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ y $\frac{1}{x-y}$

d) $\frac{x}{x^2-x}$ y $\frac{2}{2x-2}$

a) Sí son equivalentes, porque $3(x-4) = 3x-12$.

b) No son equivalentes, ya que $2(x^2+x) \neq 2x^2$.

c) Sí son equivalentes, porque $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

d) Sí son equivalentes, porque $(2x-2)x = 2x^2 - 2x$.

25 Descompón en factores y simplifica.

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2}$

b) $\frac{x+2}{x^2-4}$

c) $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25}$

d) $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2}$

e) $\frac{x-2}{x^2+x-6}$

f) $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2}$

a) $\frac{x^2-9}{(x+3)^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$

b) $\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

c) $\frac{x^2+25-10x}{x^2-25} = \frac{(x-5)^2}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-5}{x+5}$

d) $\frac{x^2+xy}{x^2+2xy+y^2} = \frac{x(x+y)}{(x+y)^2} = \frac{x}{x+y}$

e) $\frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$

f) $\frac{x^2y-3xy^2}{2xy^2} = \frac{xy(x-3y)}{2xy^2} = \frac{x-3y}{2y}$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

Pág. 11

26 □□□ Reduce a común denominador y opera.

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$

d) $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$

a) $\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x} = \frac{2-1+4}{4x} = \frac{5}{4x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = \frac{6-x+3x}{3x^2} = \frac{2x+6}{3x^2}$

c) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x-x+1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2-x}$

d) $\frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{2x+4+2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x}{x^2-4}$

27 □□□ Efectúa.

a) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x}$

c) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x}$

d) $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3}$

a) $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} - 1 = \frac{x^2+6-2x}{2x}$

b) $\frac{2}{x^2} - \frac{x+1}{3x} = \frac{6-x(x+1)}{3x^2} = \frac{6-x^2-x}{3x^2}$

c) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x} = \frac{x^2-3(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x^2-3x+9}{x^2-3x}$

d) $\frac{x-3}{x+1} - \frac{x}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)-x(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{-9-x}{x^2+4x+3}$

28 □□□ Opera.

a) $\frac{x}{3} \cdot \frac{2x+1}{x-1}$

b) $\frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1}$

c) $\frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{3x}$

d) $\frac{2x}{2x-3} : \frac{x+1}{2x+3}$

a) $\frac{x}{3} \cdot \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x^2+x}{3x-3}$

b) $\frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$

c) $\frac{1}{x-1} : \frac{x+1}{3x} = \frac{3x}{x^2-1}$

d) $\frac{2x}{2x-3} : \frac{x+1}{2x+3} = \frac{4x^2+6x}{2x^2-x-3}$

2 Soluciones a los ejercicios y problemas

Pág. 12

29 □□□ Opera y simplifica si es posible.

a) $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2}$

b) $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x}$

a) $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x}{2} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{2} = \frac{(x+1)x}{2x} = \frac{x+1}{2}$

b) $\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+2}\right) : \frac{x-2}{x} = \left(\frac{2x+4-2x}{x(x+2)}\right) : \frac{x-2}{x} = \frac{4x}{x(x+2)(x-2)} = \frac{4}{x^2-4}$

30 □□□ Descompón en factores el dividendo y el divisor, y, después, simplifica.

a) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$

b) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 + x^2}$

c) $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 - 9x + 6}$

d) $\frac{x^2 - x - 42}{x^2 - 8x + 7}$

a) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x}{x-3}$

b) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 + x^2} = \frac{(x+1)(x-4)}{x^2(x+1)} = \frac{x-4}{x^2}$

c) $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3x^2 - 9x + 6} = \frac{x(x^2 - 3x + 2)}{3(x^2 - 3x + 2)} = \frac{x}{3}$

d) $\frac{x^2 - x - 42}{x^2 - 8x + 7} = \frac{(x+6)(x-7)}{(x-1)(x-7)} = \frac{x+6}{x-1}$