Control Global de la 1ª Evaluación
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
1º de Bachillerato

1. (5,5 puntos). Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=3$

b) $\log x-\log(22-x)=1$

c) $\dfrac{9^{x-2}}{3^{x+1}}=3$

d) $\dfrac{(x-1)^2-(x-2)^2}{x^2-1}+\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x-1}{x+1}$

2. (1,5 puntos). Dado el polinomio P(x) = $x^5+5mx^4+8x^3+4x^2$,

a) calcular "m" para que sea divisible por (x+1).
b) Resolver la ecuación P(x)=0 tomando m=1.

3. (1,5 puntos). Resolver por el método de Gauss el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y=11-5z \\ x+6z=29-5y \end{cases}$$

4. (1,5 puntos) Calcular los lados de un rectángulo sabiendo que el perímetro es 14 cm y la diagonal 5 cm.

SOLUCIONES

1. (5,5 puntos). Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=3$

Para resolver una ecuación irracional (aquélla en que la incógnita aparece dentro de alguna raíz), hacemos que un sumando que contenga una única raíz quede solo en un miembro de la ecuación, pasando el resto al otro miembro. A continuación, elevamos ambos miembros al cuadrado, con lo que desaparecerá dicha raíz. Si tras ello aún quedasen raíces, repetimos el proceso: aislar un sumando con una raíz en un miembro y elevar al cuadrado. Siempre que elevamos al cuadrado los dos miembros de una ecuación, estamos obligados a comprobar las soluciones *en la ecuación original*, porque podemos haber introducido algunas no válidas. Por lo tanto:

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=3 \Rightarrow \sqrt{x+4}=3-\sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{x+4})^2=(3-\sqrt{x-1})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+4=3^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{x-1}+(\sqrt{x-1})^2 \Rightarrow x+4=9-6\sqrt{x-1}+x-1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+4=8+x-6\sqrt{x-1} \Rightarrow 6\sqrt{x-1}=8+x-x-4 \Rightarrow 6\sqrt{x-1}=4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3\sqrt{x-1}=2 \Rightarrow (3\sqrt{x-1})^2=2^2 \Rightarrow 3^2(\sqrt{x-1})^2=4 \Rightarrow 9(x-1)=4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-1=\frac{4}{9} \Rightarrow x=1+\frac{4}{9}=\boxed{\frac{13}{9}}$$

Comprobamos la validez de la solución obtenida, sustituyéndola en la ecuación original:

$$\sqrt{\frac{13}{9}+4}+\sqrt{\frac{13}{9}-1}=\sqrt{\frac{13+36}{9}}+\sqrt{\frac{13-9}{9}}=\sqrt{\frac{49}{9}}+\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}=\frac{9}{3}=3$$

Por lo que la solución es válida.

b) $\log x-\log(22-x)=1$

En este tipo de ecuaciones, si es posible calcular cuánto vale $\log x$ sin eliminar logaritmos, los cálculos suelen ser más fáciles. En este caso, no es posible, porque logaritmo de una suma no es simplificable. Aplicamos entonces propiedades de logaritmos para eliminarlos:

$$\log x-\log(22-x)=1 \Rightarrow \log\frac{x}{22-x}=1 \Rightarrow \frac{x}{22-x}=10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=10(22-x) \Rightarrow x=220-10x \Rightarrow x+10x=220 \Rightarrow 11x=220 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{220}{11}=\boxed{20}$$

En las ecuaciones logarítmicas siempre hay que comprobar las soluciones, porque podría hacerse cero o negativo algún argumento de logaritmo, y eso no está permitido:

$$\log 20-\log(22-20)=\log 20-\log 2$$

que cumple el requisito mencionado. No hemos terminado de comprobar si la ecuación está bien resuelta, porque no era de eso de lo que trataba la comprobación: si no hemos errado en los cálculos, la solución debe ser válida.

c) $\dfrac{9^{x-2}}{3^{x+1}}=3$

Para resolver ecuaciones exponenciales (la incógnita está en el exponente), hay varias técnicas: conseguir una igualdad entre dos potencias de la misma base, tomar logaritmos, o buscar que aparezca la misma base con el mismo exponente en más de un lugar, y realizar un cambio de incógnita. Realizamos cambios en la ecuación dada para ver cuál de las técnicas nos interesa:

$$\frac{(3^2)^{x-2}}{3^{x+1}} = 3 \quad \Rightarrow$$

Todo nos ha quedado en base 3 y no hay sumandos, por lo que previsiblemente usaremos la primera de las técnicas enumeradas antes.

$$\Rightarrow \quad \frac{3^{2(x-2)}}{3^{x+1}} = 3 \quad \Rightarrow \quad 3^{2(x-2)-(x+1)} = 3 \quad \Rightarrow$$

Atención al paréntesis de este último paso. Si dos potencias de igual base dan el mismo resultado, necesariamente los exponentes coinciden:

$\Rightarrow \quad 2(x-2)-(x+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x-4-x-1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x-5 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 6}$

d) $\dfrac{(x-1)^2-(x-2)^2}{x^2-1} + \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1}$

Para sumar fracciones algebraicas, necesitaremos, igual que en las fracciones ordinarias, el mismo denominador. Vamos a simplificar, primeramente:

$$\frac{(x-1)^2-(x-2)^2}{x^2-1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-2x+1-(x^2-4x+4)}{x^2-1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^2-2x+1-x^2+4x-4}{x^2-1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x-3}{x^2-1} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1} \quad \Rightarrow$$

El denominador no va a requerir operaciones para factorizarlo, porque es una igualdad notable (diferencia de cuadrados): $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Por tanto:

$$\Rightarrow \quad \frac{2x-3}{(x-1)(x+1)} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x-3}{(x-1)(x+1)} + \frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x-3+x^2+2x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad x^2+4x-2 = \frac{x-1}{x+1}(x-1)(x+1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2+4x-2 = (x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x-2 = x^2-2x+1 \quad \Rightarrow \quad 4x+2x = 1+2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 6x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

2. (1,5 puntos). Dado el polinomio P(x) = $x^5 + 5mx^4 + 8x^3 + 4x^2$,

a) calcular "m" para que sea divisible por (x+1).

Según el Teorema del Resto, el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre otro de la forma $x - a$ es el valor numérico de $P(x)$ cuando $x = a$, es decir $P(a)$. Consiguientemente, si queremos que la división del enunciado del problema sea exacta, el resto de la misma debe valer 0. Es decir:

$$P(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^5 + 5m(-1)^4 + 8(-1)^3 + 4(-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 + 5m - 8 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5 + 5m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5m = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m = 1}$$

b) Resolver la ecuación P(x)=0 tomando m=1.

Resolver la ecuación $x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 4x^2 = 0$ es lo mismo que encontrar las raíces del polinomio. Además, a es raíz de $P(x)$ si, y sólo si $P(a) = 0$, lo que equivale a que $P(x)$ sea divisible entre $x - a$. Por tanto, el problema es lo mismo que encontrar todos los divisores exactos de $P(x)$ de la forma $x - a$. Y, a su vez, este problema es igual a factorizar $P(x)$.

Para empezar, podemos sacar x^2 factor común:

$$P(x) = x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 4x^2 = x^2(x^3 + 5x^2 + 8x + 4)$$

Factorizamos el polinomio resultante:

	1	5	8	4
– 1		– 1	– 4	– 4
	1	4	4	0
– 2		– 2	– 4	
	1	2	0	
– 2		– 2		
	1	0		

Como sabemos, en cada paso probamos divisores, positivos o negativos, del término independiente (del último número). Cuando llegamos al polinomio de grado 2, si no encontramos raíces enteras, podemos optar por igualarlo a 0 y resolver la ecuación de segundo grado resultante.
Como consecuencia de todo el proceso, hemos factorizado:

$$P(x) = x^2(x + 1)(x + 2)^2\cdot 1$$

Así que la ecuación es:

$$x^2(x + 1)(x + 2)^2 = 0$$

Un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores vale 0. De aquí, sacamos, pues:

$x = 0$ ó
$x = 0$ ó
$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = – 1$ ó
$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = – 2$ ó
$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = – 2$

Luego las soluciones buscadas son: $\boxed{x = 0 \text{ (doble)}, x = -1 \text{ ó } x = -2 \text{ (doble)}}$

3. (1,5 puntos). Resolver por el método de Gauss el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y = 11 - 5z \\ x + 6z = 29 - 5y \end{cases}$$

En primer lugar, vamos a escribir el sistema en forma estándar, es decir, con las incógnitas en los primeros miembros, y los términos independientes en los segundos miembros. Así:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x + 5y + 6z = 29 \end{array}\right\}$$

El método consiste en eliminar una de las incógnitas en todas las ecuaciones menos en una, que no vuelve a utilizarse hasta el final. Con las ecuaciones restantes, hacemos lo mismo: eliminamos otra de las incógnitas en todas las ecuaciones menos en una. Y así sucesivamente. A esto se le llama *triangularizar* el sistema.
Estas operaciones se hacen de forma análoga al método de reducción, es decir, con la ecuación en la que no vamos a eliminar la incógnita que toque y con cada una de las restantes, se multiplica cada una de ellas por el número adecuado para que al sumarlas se elimine esa incógnita. La ecuación resultante de la suma sustituye en el

sistema original a la segunda de estas ecuaciones, es decir, no a aquella en la que no vamos a eliminar la incógnita, sino a la otra.
Haremos el proceso en forma matricial, que es lo habitual. Así que comenzaremos por escribir la *matriz* a la que llamamos *ampliada*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & 5 & 6 & 29 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \rightarrow \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 27 \end{pmatrix}$$

La fila 1, correspondiente a la primera ecuación, no volverá a tocarse. Es habitual, en estos cambios, en la operación que hacemos con las filas (ecuaciones), escribir delante la fila que estamos cambiando multiplicada, en su caso, por un número y, como segundo sumando, la otra fila. Y si alguna de las dos debe multiplicarse por un número negativo, se hará en esta segunda fila. Continuamos el proceso:

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ F_3 - 4F_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

Reconstruimos las ecuaciones:

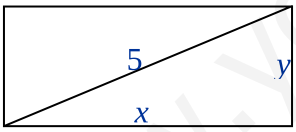
3ª ec: $-7z = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{z = \dfrac{1}{7}}$

2ª ec: $y + 3z = 7 \;\Rightarrow\; y + 3\dfrac{1}{7} = 7 \;\Rightarrow\; \boxed{y = 7 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{46}{7}}$

1ª ec: $x + y + z = 2 \;\Rightarrow\; x + \dfrac{46}{7} + \dfrac{1}{7} = 2 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 2 - \dfrac{47}{7} = -\dfrac{33}{7}}$

Por tanto, el sistema tiene *solución única*: $\boxed{x = -\dfrac{33}{7},\ \text{con}\ y = \dfrac{46}{7}\ \text{con}\ z = \dfrac{1}{7}}$

4. (1,5 puntos) Calcular los lados de un rectángulo sabiendo que el perímetro es 14 cm y la diagonal 5 cm.



El perímetro es 14: $2x + 2y = 14 \;\Rightarrow\; x + y = 7$
La diagonal es 5, así que, por Pitágoras: $x^2 + y^2 = 25$
Nos queda un sistema *no lineal* de dos ecuaciones con dos incógnitas. La forma habitual de resolverlo es *por sustitución*. Despejaremos en la primera ecuación y sustituiremos en la segunda:

$y = 7 - x$

$x^2 + (7 - x)^2 = 25 \;\Rightarrow\; x^2 + 49 - 14x + x^2 - 25 = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 14x + 24 = 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; x^2 - 7x + 12 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ = \dfrac{8}{2} = 4 \end{array} \right.$$

- Si $x = 3 \;\Rightarrow\; y = 7 - x = 7 - 3 = 4$
- Si $x = 4 \;\Rightarrow\; y = 7 - x = 7 - 4 = 3$

De modo que tenemos dos soluciones, pero ambas son el mismo rectángulo en posición vertical u horizontal:

$$\boxed{x = 3\ \text{con}\ y = 4 \quad \text{ó} \quad x = 4\ \text{con}\ y = 3}$$