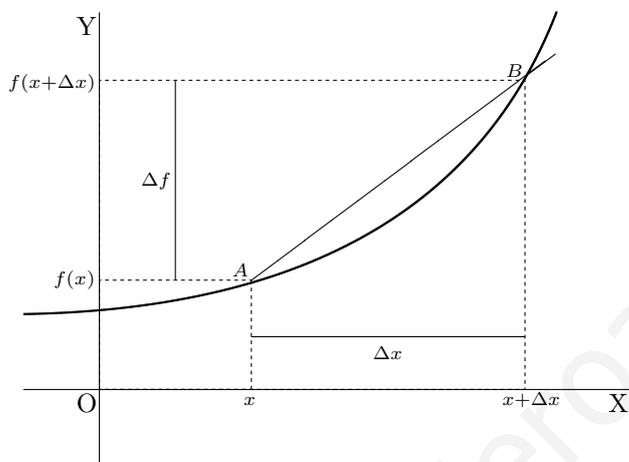


# DERIVADAS

Jesús García de Jalón de la Fuente

## 1. Función derivada

La **tasa de variación media** de una función en un intervalo, o **pendiente media** de la curva correspondiente se define como el cociente de los incrementos de la función y de la variable entre los dos puntos de la curva:



$$m_{AB} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La **tasa de variación instantánea** de una función o **pendiente de la curva** en un punto es la tasa de variación media entre dos puntos cuando la distancia entre ellos tiende a cero, es decir, el límite de la expresión anterior cuando  $\Delta x$  tiende a cero:

$$m_A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

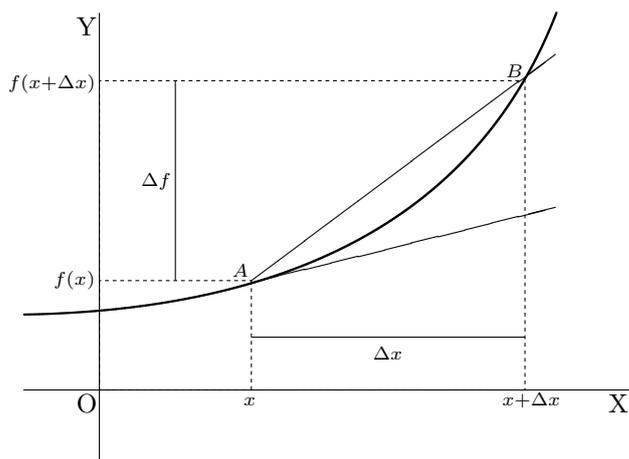
La **tangente** a una curva en un punto  $A$  es la recta que une dos puntos de la curva  $A$  y  $B$  cuando la distancia entre ambos tiende a cero. La pendiente media de una curva entre dos puntos  $A$  y  $B$ , es la pendiente de la recta que une los dos puntos de la curva. Al aproximarse los dos puntos, la pendiente media pasa a ser la pendiente en el punto  $A$ , y la recta  $AB$  se transforma en la tangente a la curva en el punto  $A$ . La pendiente de una curva es la pendiente de la recta tangente a la curva.

La **derivada** de la función  $f(x)$  en un punto cualquiera  $x$  se define como el límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

este límite considerado como función de  $x$  se llama **función derivada** de  $f(x)$ . La derivada de la función  $f(x)$  se representa por  $f'(x)$  y también por  $Df(x)$  o  $\frac{df}{dx}$ .

La derivada de una función debe interpretarse geoméricamente como la pendiente de la curva que representa la función o como la pendiente de la recta tangente a esa curva.



Toda función derivable en un punto es continua en ese punto puesto que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x) \cdot \Delta x = 0$$

Puesto que la pendiente de la recta tangente es igual a la derivada de la función en el punto, la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto de abscisa  $x_0$  (y ordenada  $f(x_0)$ ) es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

## 2. Reglas de derivación

REGLAS GENERALES	FUNCIONES SIMPLES	FUNCIONES COMPUESTAS
$D[u \pm v] = u' \pm v'$	$D[K] = 0$	$D[u^n] = n \cdot x^{n-1} \cdot u'$
$D[K \cdot u] = K \cdot u'$	$D[x^n] = n \cdot x^{n-1}$	$D[\ln u] = \frac{1}{u} \cdot u'$
$D[u \cdot v] = u'v + v'u$	$D[\ln x] = \frac{1}{x}$	$D[\log_a u] = \frac{1}{x \cdot \ln a} \cdot u'$
$D\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$D[\log_a x] = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$D[e^u] = e^u \cdot u'$
$D[f(u(x))] = f'(u) \cdot u'(x)$	$D[e^x] = e^x$	$D[a^u] = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
	$D[a^x] = a^x \cdot \ln a$	

## 3. Funciones crecientes y decrecientes

Una función  $f(x)$  es **creciente** en el punto  $x_0$  si en ese punto toma un valor mayor que en los puntos próximos situados a su izquierda y menor que en los puntos próximos situados a su derecha:

$$f \text{ creciente en } x_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x < x_0 & \text{entonces } f(x) < f(x_0) \\ \text{si } x > x_0 & \text{entonces } f(x) > f(x_0) \end{cases}$$

Una función  $f(x)$  es bf decreciente en el punto  $x_0$  si en ese punto toma un valor menor que en los puntos próximos situados a su izquierda y mayor que en los puntos próximos situados a su derecha:

$$f \text{ decreciente en } x_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x < x_0 & \text{entonces } f(x) > f(x_0) \\ \text{si } x > x_0 & \text{entonces } f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

**Teorema:** si la derivada de la función  $f(x)$  es positiva (negativa) en  $x_0$ , la función es creciente (decreciente) en  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \text{si } f'(x_0) > 0 & \text{ entonces } f \text{ creciente en } x_0 \\ \text{si } f'(x_0) < 0 & \text{ entonces } f \text{ decreciente en } x_0 \end{aligned}$$

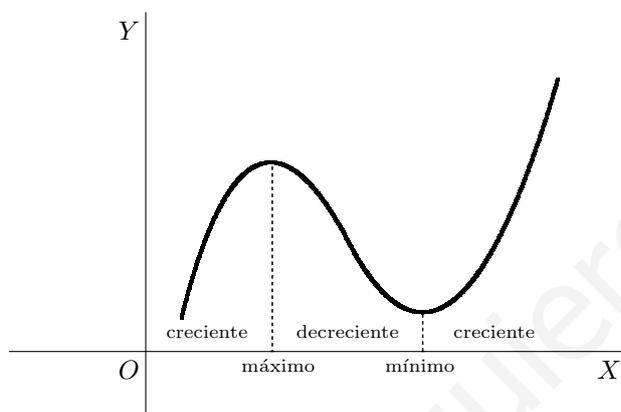
La función  $f(x)$  tiene un **máximo relativo** en el punto  $x_0$  si en ese punto toma un valor mayor que en los puntos próximos situados tanto a su izquierda como a su derecha.

Una función  $f(x)$  tiene un **mínimo relativo** en el punto  $x_0$  si en ese punto toma un valor menor que en los puntos próximos situados tanto a su izquierda como a su derecha.

**Teorema 1:** si  $x_0$  es un máximo o un mínimo relativo,  $f'(x_0) = 0$

**Teorema 2:** si  $f'(x_0) = 0$  y  $f''(x_0) < 0$ ,  $x_0$  es un máximo relativo.

**Teorema 3:** si  $f'(x_0) = 0$  y  $f''(x_0) > 0$ ,  $x_0$  es un mínimo relativo.



## 4. Concavidad y convexidad

Una función  $f(x)$  es **convexa** en el punto  $x_0$  si en los puntos próximos a  $x_0$  la tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto de abscisa  $x_0$  queda por debajo de ella:

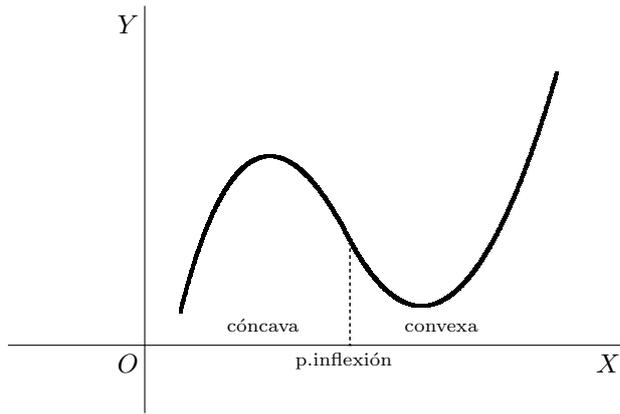
$$f \text{ convexa en } x_0 \Rightarrow f(x) - y_t = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] > 0$$

Una función  $f(x)$  es **cóncava** en el punto  $x_0$  si en los puntos próximos a  $x_0$  la tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto de abscisa  $x_0$  queda por encima de ella:

$$f \text{ cóncava en } x_0 \Rightarrow f(x) - y_t = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] < 0$$

**Teorema 1:** si  $f''(x_0) > 0$ , la función  $f(x)$  es convexa en  $x_0$

**Teorema 2:** si  $f''(x_0) < 0$ , la función  $f(x)$  es cóncava en  $x_0$



Los puntos en que la función no es cóncava ni convexa se llaman **puntos de inflexión** de la función. En esos puntos la derivada segunda es igual a cero.

**Teorema:** si  $f''(x_0) = 0$  y  $f'''(x_0) \neq 0$ ,  $x_0$  es un punto de inflexión.

www.yoquieroaprobar.es