Sistemas de ecuaciones lineales

1. Definiciones

Un **sistema de m ecuaciones lineales** con n incógnitas es un conjunto de expresiones de la forma:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

que puede escribirse en **forma matricial** como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

y en forma abreviada como:

$$AX = C$$

Los a_{11}, a_{12}, $\cdots$, son números que se suponen conocidos y forman la matriz A que se llama **matriz de coeficientes**; x_1, x_2, ..., x_n, son las **incógnitas** y los c_1, c_2, ..., son los **términos independientes**. Las matrices X y C se llaman matriz de incógnitas y matriz de términos independientes respectivamente.

Si a la matriz de coeficientes se le añade una columna con los términos independientes, se obtiene una nueva matriz que se llama **matriz ampliada** del sistema:

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1 El sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ -2x & + & 3y & - & z & = & 7 \\ 7x & - & y & + & 3z & = & 5 \end{array}$$

puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 7 \\ 7 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Una **solución** está formada por n números que sustituidos en lugar de las incógnitas hacen que se cumplan las igualdades. Cuando un sistema admite alguna solución se llama **compatible**; en caso contrario, se llama **incompatible**. Si la solución es única el sistema es **compatible determinado**; si admite infinitas soluciones es **compatible indeterminado**.

Si dos sistemas tienen las mismas soluciones se llaman **equivalentes**. Las siguientes transformaciones no cambian las soluciones de un sistema (lo transforman en otro equivalente):

- ⋄ Cambiar el orden de las ecuaciones (intercambiar filas en la matriz ampliada)
- ⋄ Multiplicar los dos miembros de una ecuación por el mismo número distinto de cero (multiplicar por un número distinto de cero una fila de la matriz ampliada)
- ⋄ Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número o, en general, sumar a una ecuación una combinación lineal de las restantes (sumar a una fila de la matriz ampliada otra fila multiplicada por un número)
- ⋄ Suprimir cualquier ecuación que sea combinación lineal de las restantes (suprimir las filas de la matriz ampliada que sean combinación lineal de las restantes)

La aplicación sistemática de estas transformaciones para resolver el sistema, transformando la matriz ampliada en una de tipo escalonado, se llama **método de Gauss**.

Ejemplo 2 Resolver el sistema del Ejemplo 1 por el método de Gauss.

Basta aplicar transformaciones a la matriz ampliada hasta transformarla en una matriz escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 7 \\ 7 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{F_2 \to F_2 + 2F_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 11 \\ 7 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \overset{F_3 \to F_3 - 7F_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 6 & -32 & -9 \end{bmatrix} \overset{F_3 \to F_3 - 6F_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & -86 & -75 \end{bmatrix}$$

que conduce a la solución $x = \dfrac{34}{43}, \quad y = \dfrac{271}{86}, \quad z = \dfrac{75}{86}$

---

2. Regla de Cramer

Se llaman **sistemas de Cramer** aquellos que tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

Estos sistemas son siempre compatibles y tienen una sola solución (son determinados). En efecto, si la matriz de coeficientes A tiene un determinante distinto de cero, existe la matriz inversa A^{-1}. Sea el sistema en forma matricial:

$$AX = C$$

multiplicando por la izquierda por la inversa de la matriz A:

$$A^{-1}A = A^{-1}C \Longrightarrow X = A^{-1}C$$

y ésta es la única solución.

Si, por ejemplo, tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Despejando la matriz de incógnitas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Para la primera incógnita x se obtiene:

$$x = \frac{A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + A_{31}c_3}{|A|}$$

En el numerador tenemos la suma de los productos de los términos independientes por los adjuntos de la primera columna. Podemos escribir esta expresión como un determinante de forma que resulta m s fácil de recordar:

$$x = \frac{A_{11}c_1 + A_{21}c_2 + A_{31}c_3}{|A|} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

De forma similar obtendríamos para y y z:

$$y = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad z = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{23} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

Aunque este resultado lo hemos obtenido para un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, puede extenderse con facilidad a cualquier sistema de Cramer. En conclusión tenemos:

Teorema 3 (Regla de Cramer) *En un sistema de Cramer, una incógnita se puede despejar como el cociente de dos determinantes; el denominador es el determinante de la matriz de coeficientes y el numerador es el determinante de esta misma matriz, sustituyendo los coeficientes de la incógnita que se quiere despejar por los términos independientes.*

Ejemplo 4 Resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 5y & + & 2z & = & 4 \\ & - & 4y & + & 2z & = & 7 \\ 3x & - & 2y & - & 3z & = & -1 \end{array}$$

se calcula en primer lugar, el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 26$$

Ahora, aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-67}{26}$$

$$y = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{-56}{26}$$

$$z = \frac{1}{26} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & -4 & 7 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-21}{26}$$

3. Teorema de Rouché

Teorema 5 (Teorema de Rouché) *La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada:*

$$AX = C \text{ compatible} \iff \text{rango } A = \text{ rango } A^*$$

Puesto que la matriz ampliada A^* se forma añadiendo a la matriz A una columna con los términos independientes, el hecho de que los rangos sean iguales quiere decir que la columna de términos independientes es combinación lineal de las columnas de la matriz A.

Si este rango es igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado, si es menor es compatible indeterminado.

Para demostrar este teorema escribamos el sistema

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

en la forma equivalente:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Supongamos que el sistema es compatible. En ese caso existen n números α_1, α_2, $\cdots$, α_n, que sustituidos en lugar de las incógnitas verifican el sistema. Entonces:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

De esta igualdad se deduce que la columna de términos independientes es combinación lineal de las restantes y que al añadirla a la matriz A no se ha añadido ninguna columna independiente y por tanto rango $A =$ rango A^*.

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que las dos matrices A y A^* tienen el mismo rango. Entonces la columna de términos independientes debe ser combinación de las demás de forma que existen n números α_1, α_2, $\cdots$, α_n, que cumplen

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

Pero si se cumple esto, $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ es una solución del sistema y éste es compatible.

4. Sistemas homogéneos

Los **sistemas homogéneos** son aquéllos en que los términos independientes de todas las ecuaciones son iguales a cero. Un sistema homogéneo tiene la forma:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

que en forma matricial puede escribirse $AX = 0$, donde 0 representa una matriz columna de ceros.

Los sistemas homogéneos son siempre compatibles pues siempre admiten la solución $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ que se llama **solución trivial**. Para que existan soluciones distintas de la trivial debe verificarse que el rango de la matriz de coeficientes sea menor que el número de incógnitas. de esta forma el sistema ser indeterminado y tendrá más soluciones.

Las soluciones de un sistema homogéneo cumplen las siguientes propiedades:

- ◇ Si X_0 es una solución, también lo es αX_0 siendo α un número cualquiera.
- ◇ Si X_1 y X_2 son soluciones, también lo es $X_1 + X_2$.

Un caso particularmente importante se sistema homogéneo es el formado por dos ecuaciones independientes con tres incógnitas:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & 0 \end{array}$$

Una solución particular de este sistema es:

$$x = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad y = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \qquad z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

estos números son solución del sistema porque, sustituyendo por ejemplo en la primera ecuación resulta:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

Este último determinante es cero porque tiene dos filas iguales. De la misma forma se comprueba que también se cumple la segunda ecuación.

De las propiedades de los sistemas homogéneos se desprende que la solución general es:

$$x = \lambda\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad y = \lambda\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \qquad z = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

en donde λ es un número cualquiera. Este procedimiento de resolución del sistema se extiende sin dificultad a cualquier sistema homogéneo de n ecuaciones independientes con $n+1$ incógnitas.

Ejemplo 6 Resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcl} 3x - 2y + 5z & = & 0 \\ 6x + 7y - z & = & 0 \end{array}$$

Una solución de este sistema es:

$$x = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -33 \qquad y = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 33 \qquad z = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 33$$

La solución general del sistema es el producto de una solución particular no trivial multiplicada por un par metro λ:

$$x = -33\lambda \qquad y = 33\lambda \qquad z = 33\lambda$$

Puesto que al multiplicar soluciones de un sistema homogéneo por números se obtienen nuevas soluciones, podemos dividir la solución general por 33 y obtenemos:

$$x = -\lambda \qquad y = \lambda \qquad z = \lambda$$

que es la solución general escrita de una forma más sencilla.

---

5. Resolución del sistema

Para resolver un sistema cualquiera aplicaremos los resultados que hemos obtenido anteriormente. En general, procederemos de la siguiente forma:

- ◇ Se calculan los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada para ver si el sistema es compatible.
- ◇ Se busca un determinante en la matriz de coeficientes de orden igual al rango y distinto de cero.
- ◇ Se suprimen las ecuaciones que queden fuera del determinante puesto que son dependientes de las otras.
- ◇ Las incógnitas que queden fuera del determinante se pasan al segundo miembro y se las considera como parámetros. El número de parámetros es la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de la matriz.
- ◇ Se resuelve el sistema resultante (por ejemplo mediante la regla de Cramer).

Ejemplo 7 Resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & - & 5z & = & 7 \\ -3x & + & 4y & + & z & = & -4 \\ -7x & + & 8y & - & 15z & = & 8 \end{array}$$

En primer lugar veamos si el sistema es compatible. Para ello calculemos en primer ligar el rango de la matriz de coeficientes. Puesto que

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -3 & 4 & 1 \\ -7 & 8 & -15 \end{vmatrix} = -120 + 120 + 21 - 140 - 16 + 135 = 0$$

el rango es menor que 3. Dado que

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

el rango de la matriz de coeficientes es 2. Calculemos ahora el rango de la matriz ampliada. Puesto que la tercera columna de la matriz de coeficientes es combinación lineal de las dos primeras (ya que el determinante de esta matriz es cero) se tiene que:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 & 7 \\ -3 & 4 & 1 & -4 \\ -7 & 8 & -15 & 8 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Calculemos el determinante de esta última matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 64 - 168 - 84 + 196 + 64 - 72 = 0$$

Entonces el rango de la matriz ampliada es también 2. El sistema es compatible y solamente tiene 2 ecuaciones independientes. El sistema es equivalente a:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & - & 5z & = & 7 \\ -3x & + & 4y & + & z & = & -4 \end{array}$$

Lo resolvemos pasando la incógnita z al segundo miembro

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & = & 7 & + & 5z \\ -3x & + & 4y & = & -4 & + & z \end{array}$$

y resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7+5z & -3 \\ -4+z & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{28 + 20z - 12 + 3z}{8 - 9} = \frac{16 + 23z}{-1} = -23z - 16$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7+5z \\ -3 & -4+z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8 + 2z + 21 + 15z}{8 - 9} = \frac{13 + 17z}{-1} = -17z - 13$$

Llamando $z = \lambda$, se pueden expresar todas las soluciones como $(-23\lambda - 16, -17\lambda - 13, \lambda)$.

---

6. Resumen

Un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse matricialmente como $AX = C$ donde A es la **matriz de coeficientes**, X es la **matriz de incógnitas** y C la **matriz de términos independientes**. Si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas la matriz A es cuadrada. Si su determinante es distinto de cero, el sistema puede resolverse matricialmente y su solución es $X = A^{-1}C$. Estos sistemas se llaman **sistemas de Cramer** y pueden resolverse mediante la **regla de Cramer**.

Si a la matriz A se le añade una columna con los términos independientes se obtiene la **matriz ampliada** A^*. Según el **teorema de Rouché** la condición necesaria y suficiente para que un sistema tenga solución (esto es, para que sea **compatible**) es que las matrices A y A^* tengan el mismo rango. Si este rango es igual al número de incógnitas el sistema tiene solución única y es **compatible determinado**. Si el rango de las matrices es menor que el número de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones y es **compatible indeterminado**.

Los **sistemas homogéneos** tienen todos los términos independientes igual a cero. Estos sistemas son siempre compatibles porque todos ellos admiten la solución en la que todas las incógnitas son iguales a cero. Esta solución se llama **trivial**. La condición necesaria y suficiente para que un sistema homogéneo tenga soluciones distintas de la trivial es que el rango de la matriz de coeficientes sea menor que el número de incógnitas.