Matrices y determinantes

1. Matrices

Una **matriz** de orden $m \times n$ es un conjunto de $m \cdot n$ números ordenados en m **filas** y n **columnas**. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

es una matriz de orden 3×5. Una matriz cualquiera de orden $m \times n$ se escribirá de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde cada elemento de la matriz se ha señalado mediante dos subíndices, el primero que indica la fila y el segundo que indica la columna correspondiente al elemento. En lo que sigue, nombraremos a las filas de la matriz como F_1, F_2, etc., y a las columnas C_1, C_2, etc.

Una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas se llama **cuadrada**. Por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

es una matriz cuadrada puesto que tiene 3 filas y 3 columnas.

En el caso de matrices cuadradas, los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc. forman la **diagonal principal** de la matriz. Si los elementos por encima o por debajo de la diagonal principal de la matriz son ceros, la matriz se llama **triangular**. Si los elementos de la matriz se distribuyen simétricamente respecto a la diagonal, esto es, si $a_{ij} = a_{ji}$, la matriz se llama **simétrica**. Si $a_{ij} = -a_{ji}$, la matriz es **antisimétrica**. En este último caso, todos los elementos de la diagonal son ceros. Por ejemplo en:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

A es una matriz triangular, B es simétrica y C antisimétrica.

Si una matriz tiene una sola fila se llama **matriz o vector fila**. Si tiene una sola columna, se llama **matriz o vector columna**.

La **traspuesta** de una matriz A es una matriz A^t que se obtiene cambiando filas por columnas. Así, la primera fila de la matriz A^t es la primera columna de la matriz A, la segunda fila de A^t es la segunda columna de A, etc. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

La traspuesta de una matriz de orden $m \times n$ es una matriz de orden $n \times m$. Si la matriz A es cuadrada A y A^t son del mismo orden.

Una matriz es **simétrica** si coincide con su traspuesta.

$$A \text{ simétrica} \quad \Longleftrightarrow \quad A = A^t$$

Por ejemplo, la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

es simétrica.

Una matriz es antisimétrica si es igual a lu traspuesta cambiada de signo:

$$A \text{ antisimétrica} \quad \Longleftrightarrow \quad A = -A^t$$

Así:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

es antisimétrica.

La traspuesta de una matriz fila es una matriz columna y viceversa.

2. Operaciones con matrices

La **suma de matrices** del mismo orden se efectúa sumando sus elementos término a término. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Dos matrices que no sean del mismo orden no pueden sumarse.

El **producto de una matriz por un número** se obtiene multiplicando por ese número todos los elementos de la matriz. Por ejemplo

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 6 & 9 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

En general, el **producto de dos matrices** A y B se define para el caso de que el numero de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda. Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times p$, el producto AB es una matriz $m \times p$.

El elemento c_{ij} de esta matriz, es decir, el correspondiente a la fila i-ésima y a la columna j-ésima se obtiene multiplicando ordenadamente los elementos de la fila i-ésima de la matriz A por los de la columna j-ésima de la matriz B y sumando estos productos:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Por ejemplo, sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz producto $C = AB$ se obtienen multiplicando las filas de la matriz A por las columnas de la matriz B del modo explicado en el párrafo anterior. Así se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
c_{11} = 1\cdot(-2)+(-1)\cdot 3+2\cdot(-1) = 7 & c_{12} = 1\cdot 1+(-1)\cdot(-4)+2\cdot 5 = 15 \\
c_{13} = 1\cdot 5+(-1)\cdot 2+2\cdot(-2) = -1 & c_{21} = (-2)\cdot(-2)+1\cdot 3+3\cdot(-1) = 4 \\
c_{22} = (-2)\cdot 1+1\cdot(-4)+3\cdot 5 = 9 & c_{23} = (-2)\cdot 5+1\cdot 2+3\cdot(-2) = -14 \\
c_{31} = (-1)\cdot(-2)+3\cdot 3+1\cdot(-1) = 10 & c_{32} = (-1)\cdot 1+3\cdot(-4)+1\cdot 5 = -8 \\
c_{33} = (-1)\cdot 5+3\cdot 2+1\cdot 8-2) = -1 &
\end{array}$$

de modo que:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 15 & -1 \\ 4 & 9 & -14 \\ 10 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

La suma de matrices tiene las mismas propiedades que la suma de números. Sin embargo, el producto de matrices no tiene la propiedad conmutativa. En el caso de que A y B no sean matrices cuadradas, es posible que exista el producto AB y no exista el producto BA. Por ejemplo, sean:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

El producto AB no existe porque la matriz A tiene 3 columnas y la matriz B solamente tiene dos filas. Sin embargo, sí existe el producto BA pues el número de columnas de la matriz B y el número de filas de la matriz A son ambos iguales a 2.

Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, ambos productos existen aunque en general, no son iguales, esto es, tampoco en este caso el producto de matrices es conmutativo.Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

La **matriz unidad** de orden n es una matriz I tal que para cualquier matriz cuadrada A del mismo orden cumple que:

$$AI = IA = A$$

Esta matriz es:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

La **inversa de una matriz cuadrada** A es otra matriz A^{-1} de la misma dimensión que cumple que su producto por A por la izquierda o por la derecha es igual a la matriz unidad I:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

La matriz inversa puede servir para despejar la matriz incógnita en una ecuación matricial. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
AX &= B && \text{Multiplicando por la matriz inversa} \\
A^{-1}AX &= A^{-1}B && \text{Teniendo en cuenta que } A^{-1}A = I \\
IX &= A^{-1}B && \text{Y puesto que } IX = X \\
X &= A^{-1}B
\end{aligned}$$

No todas las matrices tienen inversa. Para ver qué condiciones debe cumplir una matriz cuadrada para que exista su inversa, se deben entender previamente los conceptos de dependencia e independencia lineal.

3. Rango de una matriz

Una fila de una matriz F_1 es **combinación lineal** de otra fila F_2 si es igual a ésta multiplicada por un número:

$$F_1 \text{ combinación lineal de } F_2 \Longleftrightarrow F_1 = \alpha F_2$$

Por ejemplo en la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la segunda fila es combinación lineal de la primera, puesto que es igual a la primera multiplicada por 2 ($F_2 = 2F_1$). También la tercera es combinación lineal de cualquiera de las otras puesto que se puede obtener a partir de ellas multiplicándolas por cero. En general, una fila de ceros es combinación lineal de cualquier otra fila.

De forma similar, F_1 es combinación lineal de F_2 y F_3 si se pueden encontrar dos números α y β de tal forma que se cumpla que $F_1 = \alpha F_2 + \beta F_3$. Estas definiciones se extienden sin dificultad a cualquier número de filas o columnas. Por ejemplo en:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras puesto que $F_3 = 2F_2 - F_1$.

En general, la fila F es combinación lineal de las filas F_1, F_2, $\cdots$, F_n si pueden encontrarse números α_1, α_2, $\cdots$, α_n, de tal forma que se cumpla:

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_n F_n$$

Las filas (o columnas) de una matriz son **linealmente independientes** si ninguna de ellas es combinación lineal de las restantes. En caso contrario, se dice que son dependientes. Por ejemplo, en las matrices:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -3 & 6 & -9 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

las filas son dependientes porque, según hemos visto, hay filas combinación lineal de otras.

En una matriz triangular, las filas son linealmente independientes. Por ejemplo, en

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

La fila F_2 no puede ser combinación lineal de la F_3 porque no se puede obtener 2 multiplicando 0 por un número. Las filas F_2 y F_3 son, entonces, linealmente independientes. Además, la fila F_1 no puede ser combinación lineal de las filas F_2 y F_3 porque no puede obtenerse 1 multiplicando por números los ceros de la primera columna. De esta forma, las tres filas son independientes.

El número de filas independientes en una matriz es el mismo que el de columnas independientes. Este número se llama **rango de la matriz**.

Un método para calcular el rango de una matriz se fundamenta en las siguientes propiedades:

- Las filas o columnas combinación lineal de las restantes pueden suprimirse sin cambiar el rango.
- Las filas distintas de cero de una matriz escalonada son linealmente independientes.

- ⋄ Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las restantes, el rango no cambia.

Ejemplo 1 Calcular el rango de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

La quinta columna es igual a la cuarta multiplicada por -2 de forma que puede suprimirse sin cambiar el rango:

$$\text{rango}(A) = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{F_3 \to F_3 + F_1}{=} \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La cuarta fila es igual a la tercera multiplicada por -1 de forma que la podemos suprimir. Como $F_3 = 2F_2$ suprimimos también la tercera fila:

$$\text{rango} A = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

♠♠♠

Otro método para calcular el rango se basa en el concepto de **determinante**. El determinante de una matriz cuadrada según se verá en la sección siguiente *es un número que se asocia a la matriz y que es igual a cero en el caso de que las filas (o columnas) sean linealmente dependientes y distinto de cero si son linealmente independientes.*

4. Determinante de una matriz

4.1. Determinantes de segundo y tercer orden

El determinante de una matriz cuadrada es un número y se representa mediante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

En el caso más sencillo de las matrices 2×2 el determinante es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

El cálculo de los determinantes de orden 3 es un poco más complicado:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

fórmula que puede recordarse con ayuda de la **regla de Sarrus**: se escriben bajo el determinante las dos primeras filas, se suman con su signo los productos de los elementos de la diagonal principal y sus paralelas y se cambia el signo de los productos de los elementos de la otra diagonal y sus paralelas.

4.2. Determinantes de orden superior

El **menor complementario** de un elemento es el determinante que resulta de suprimir la fila y columna correspondiente al elemento. El **adjunto** es el menor complementario con signo más o menos dependiendo de que la suma de sus subíndices sea par o impar. El adjunto del elemento a_{ij} se representa por A_{ij}. Por ejemplo en

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -13 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

Este concepto es importante porque permite obtener un determinante de orden cualquiera calculando determinantes de orden inferior. Ello es posible porque se cumple la propiedad siguiente:

Propiedad. El determinante de una matriz es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por los adjuntos correspondientes. Así por ejemplo, puede obtenerse un determinante de orden 4 calculando cuatro determinantes de orden 3 (los adjuntos de una linea cualquiera):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

Este modo de calcular un determinante se suele llamar **desarrollar por los elementos de una línea**.

En el ejemplo anterior podría calcularse el determinante desarrollando por ejemplo por la primera columna:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) + 3 \cdot (-7) + 2 \cdot 0 = -28$$

El mismo resultado se obtiene desarrollando por la segunda fila:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-7) - 2 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = -28$$

5. Propiedades de los determinantes

1. **Transformaciones de los determinantes**
   - ◇ Si se intercambian filas y columnas el determinante no varía. Otra manera de expresar esta propiedad es decir que el determinante de una matriz cuadrada es igual al de su traspuesta.
   - ◇ Si se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante no cambia de valor absoluto pero sí de signo.

- ◇ Si a una fila se le suma otra multiplicada por un número, el determinante no varía. Tampoco cambia si a una fila se le suma una combinación lineal de las restantes.

2. **Factor común**. Si se multiplican todos los elementos de una línea por el mismo número, el determinante queda multiplicado por ese número.

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. **Propiedad distributiva**:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4. **Determinantes y dependencia lineal**. En general, un determinante es cero si sus filas (o columnas) son linealmente dependientes y es distinto de cero si sus filas (o columnas) son linealmente independientes.

   De aquí se deduce que, en particular, un determinante será cero:

   - ◇ Si tiene una fila o una columna de ceros
   - ◇ Si tiene dos filas o columnas iguales
   - ◇ Si tiene dos filas o columnas proporcionales
   - ◇ Si una fila o columna es combinación lineal de las restantes

   El hecho de que un determinante sea cero si sus filas son linealmente dependientes y distinto de cero si son linealmente independientes, proporciona un método de calcular el rango de una matriz mediante determinantes: el rango de una matriz es el orden del determinante distinto de cero más grande que puede formarse con las filas y columnas de la matriz.

Ejemplo 2 Calcular el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

El determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

es distinto de cero. Eso quiere decir que las dos primeras filas y las dos primeras columnas son linealmente independientes.

Vamos a ver si son independientes las tres primeras columnas. Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

que es claramente igual a cero (basta desarrollar por la tercera columna). Entonces, estas tres columnas son dependientes. Puest oque las dos primeras son independientes, la tercera es combinación lineal de ellas.

Ahora comprobaremos si la cuarta columna es independiente de las dos primeras. Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 4 + 4 + 2 - 4 = 0$$

La cuarta columna es también combinación lineal de las dos primeras. Solamente hay dos columnas independientes y el rango de la matriz es 2.

♠♠♠

Si dos filas son dependientes, todos los determinantes de orden 2 que se pueden formar con ellas deben ser iguales a cero. Si tres filas son dependientes deberán ser iguales a cero todos los determinantes de orden 3 que pueden formarse con ellas. Esta propiedad puede aplicarse también a un número cualquiera de filas.

5. **Adjuntos y determinantes**: la suma de los productos de los elementos de una fila por los adjuntos de otra es igual a cero.

   Como se dijo anteriormente, el determinante de una matriz cuadrada puede obtenerse multiplicando los elementos de una línea por los adjuntos correspondientes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

   Si ahora sustituimos los elementos de la primera fila por los de la segunda resulta:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$$

   que es igual a cero porque el determinante tiene dos filas iguales.

   Por ejemplo,si en

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

   se multiplican los elementos de la primera fila por los adjuntos de la segunda resulta (los adjuntos de esta matriz se han calculado en la sección anterior):

$$1 \cdot (-7) + 2 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = 0$$

6. **Determinante del producto de matrices**. El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes:

$$|AB| = |A||B|$$

6. Matriz inversa

Como se explicó anteriormente, la **inversa de una matriz cuadrada** A es una matriz A^{-1} que cumple que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Sobre la existencia de la matriz inversa se cumple el siguiente teorema:

Teorema 3 *La condición necesaria y suficiente para que exista la inversa de la matriz A es que el determinante de A sea distinto de cero:*

$$|A| \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists A^{-1}$$

En efecto, si existe A^{-1} debe cumplirse que

$$|A||A^{-1}| = |I| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |A| \neq 0$$

Por otra parte, si $|A| \neq 0$ definimos la **matriz adjunta** de A como la matriz que resulta de sustituir cada elemento de esa matriz por su adjunto:

$$Adj\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{3} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de A puede calcularse obteniendo la matriz adjunta de la traspuesta de A dividida por $|A|$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,Adj\,A^t$$

Para comprobarlo basta hacer el producto y aplicar las propiedades que se han visto anteriormente del desarrollo del determinante por los elementos de una línea:

$$A\,Adj\,A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

de forma que

$$\frac{1}{|A|}\,Adj\,A^t = I$$

Ejemplo 4 Calcular la inversa de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Se calcula en primer lugar el determinante de la matriz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -4 & 3 & -7 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 63$$

Puesto que el determinante es distinto de cero existe la inversa de la matriz A. Calculamos $Adj\ A$ y trasponemos:

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 9 & 54 & 18 \\ -3 & -39 & -6 \\ 8 & -1 & -5 \end{bmatrix} \qquad Adj\ A^t = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 8 \\ 54 & -39 & -1 \\ 18 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

Dividiendo ahora por $|A|$ se obtiene la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{63}\begin{bmatrix} 9 & -3 & 8 \\ 54 & -39 & -1 \\ 18 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

♠♠♠

7. Resumen

Las matrices son tablas de números agrupados en filas y columnas. Las matrices pueden multiplicarse por números, sumarse y multiplicarse entre sí siempre que cumplan determinadas condiciones. El problema de calcular la inversa de una matriz cuadrada conduce al concepto de dependencia e independencia lineal. El determinante de una matriz permite distinguir si las filas de la matriz son dependientes o independientes. También proporciona un método para calcular la matriz inversa.