POTENCIAS, RAÍCES Y LOGARITMOS

Jesús García de Jalón de la Fuente

1. Potencias

Las **potencias de exponente natural** son productos de factores iguales:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \quad \text{(n factores)}$$

Las potencias así definidas tienen las siguientes propiedades:

- Producto de potencias de la misma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- Cociente de potencias de la misma base: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m+n}$
- Potencia de un producto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- Potencia de un cociente: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
- Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{mn}$

Las potencias de exponente cero y de **exponente entero negativo** se definen de forma que se cumplan estas propiedades:

$$a^0 = 1; \qquad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Lo mismo pasa con las potencias de **exponente fraccionario**. Por ejemplo, para que se cumpla la última propiedad debe verificarse:

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$$

y por consiguiente $a^{\frac{1}{2}}$ debe ser un número que elevado al cuadrado sea igual a a. Como se sabe, este número es $\sqrt{a}$. En general:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

2. Raíces

La **raíz enésima** de un número a es un número cuya potencia enésima es a:

$$x^n = a \Longrightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

Puesto que las raíces pueden considerarse potencias de exponente fraccionario, sus propiedades son similares a las de las potencias:

- Raíz de un producto: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- Raíz de un cociente: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- Raíz de una potencia: $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
- Raíz de una raíz: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

3. Logaritmos

Si en una ecuación $x^n = A$ se desea despejar la base de la potencia x puede hacerse mediante la raíz enésima $x = \sqrt[n]{A}$. Pero la raíz no permite despejar el exponente de la potencia. Para ello es necesaria otra función, el logaritmo.

Se llama **logaritmo** en la base a del número N al exponente que hay que poner a a para obtener N. Este número se simboliza mediante $\log_a N$. Así:

$$a^x = N \Longrightarrow x = \log_a N \qquad \text{o bien} \qquad a^{log_a N} = N$$

De la definición de logaritmo se deducen las siguientes **propiedades de simplificación**:

$$a^{\log_a x} = x \qquad\qquad \log_a a^x = x$$

Los logaritmos tienen las siguientes **propiedades**:

- No existe el logaritmo de los números negativos
- El logaritmo de 1 es igual a cero en cualquier base
- El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de sus logaritmos:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

- El logaritmo del cociente de dos números es igual a la diferencia de sus logaritmos

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

- El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

- El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

Conocidos los logaritmos en una base a, pueden calcularse en cualquier otra base b mediante la siguiente fórmula:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Los logaritmos en la base e le llaman **logaritmos neperianos** y se representan mediante el signo ln. En función de estos logaritmos, la fórmula del cambio de base se escribe:

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Con ayuda de los logaritmos, cualquier potencia puede escribirse en la base que queramos. En particular, puede escribirse como potencia de base e:

$$a^x = e^{x \ln a}$$