

## POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

\* Las numeraciones indicadas entre páginas se refieren a las páginas del libro de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I, de primero de bachillerato de la editorial Anaya, Andalucía, cuyos autores son J. Colera, R. García y M.J.Oliveira

### Página 85

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

#### PARA PRACTICAR

##### 1 Opera y simplifica:

a)  $(2x^2 - 3)(x + 1) - (x + 2)(3x - 1)$

b)  $\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x+1}{3}\right)^2$

c)  $(2x + 3)^2 - 3x(x + 1)$

a)  $(2x^2 - 3)(x + 1) - (x + 2)(3x - 1) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 3 - (3x^2 - x + 6x - 2) =$   
 $= 2x^3 + 2x^2 - 3x - 3 - 3x^2 + x - 6x + 2 =$   
 $= 2x^3 - x^2 - 8x - 1$

b)  $\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2x+1}{3}\right)^2 = \frac{9x^2 - 6x + 1}{4} + \frac{4x^2 + 4x + 1}{9} =$   
 $= \frac{81x^2 - 54x + 9 + 16x^2 + 16x + 4}{36} = \frac{97x^2 - 38x + 13}{36}$

c)  $(2x + 3)^2 - 3x(x + 1) = 4x^2 + 12x + 9 - 3x^2 - 3x = x^2 + 9x + 9$

2 Calcula el cociente y el resto en cada una de las siguientes divisiones:

a)  $(x^4 - 4x^2 + 12x - 9) : (x^2 - 2x + 3)$

b)  $(3x^3 - 5x^2 + 7x - 3) : (x^2 - 1)$

c)  $(3x^4 - x^2 - 1) : (3x^2 - 3x - 4)$

$$\begin{array}{r}
 x^4 \quad - 4x^2 + 12x - 9 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 \\ x^2 + 2x - 3 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^4 + 2x^3 - 3x^2} \\
 2x^3 - 7x^2 + 12x - 9 \\
 \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x} \\
 -3x^2 + 6x - 9 \\
 \underline{3x^2 - 6x + 9} \\
 0
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{Cociente} = x^2 + 2x - 3 \\
 \text{Resto} = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 \\ 3x - 5 \end{array} \right. \\
 \underline{-3x^3 \quad + 3x} \\
 -5x^2 + 10x - 3 \\
 \underline{5x^2 \quad - 5} \\
 10x - 8
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{Cociente} = 3x - 5 \\
 \text{Resto} = 10x - 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3x^4 \quad - x^2 \quad - 1 \quad \left| \begin{array}{l} 3x^2 - 3x - 4 \\ x^2 + x + 2 \end{array} \right. \\
 \underline{-3x^4 + 3x^3 + 4x^2} \\
 3x^3 + 3x^2 \quad - 1 \\
 \underline{-3x^3 + 3x^2 + 4x} \\
 6x^2 + 4x - 1 \\
 \underline{-6x^2 + 6x + 8} \\
 10x + 7
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{Cociente} = x^2 + x + 2 \\
 \text{Resto} = 10x + 7
 \end{array}$$

3 Halla el cociente y el resto en cada caso:

a)  $(x^4 - 2x^3 + 5x - 1) : (x - 2)$

b)  $(x^4 + x^2 - 20x) : (x + 2)$

c)  $(x^4 - 81) : (x + 3)$

$$\begin{array}{r}
 \text{a)} \quad \begin{array}{c|cccccc} & 1 & -2 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & & 2 & 0 & 0 & 10 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 5 & 9 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{Cociente: } x^3 + 5 \\
 \text{Resto: } 9
 \end{array}
 \end{array}$$

b)	1	0	1	-20	0	Cociente: $x^3 - 2x^2 + 5x - 30$
	-2	-2	4	-10	60	Resto: 60
	1	-2	5	-30	60	

c)	1	0	0	0	-81	Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$
	-3	-3	9	-27	81	Resto: 0
	1	-3	9	-27	0	

4 Aplica la regla de Ruffini para calcular  $P(-2)$  y  $P(5)$ , siendo  $P(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 7$ .

1	0	-3	5	-7	
-2	-2	4	-2	-6	$P(-2) = -13$
1	-2	1	3	-13	

1	0	-3	5	-7	
5	5	25	110	575	$P(5) = 568$
1	5	22	115	568	

5 Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a)  $x^3 - x^2 + 9x - 9$

b)  $x^4 + x^2 - 20$

c)  $x^3 + x^2 - 5x - 5$

d)  $x^4 - 81$

a)	1	-1	9	-9
	1	1	0	9
	1	0	9	0

$$x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9) \rightarrow \text{Raíces: } x = 1$$

b)	1	0	1	0	-20
	2	2	4	10	20
	1	2	5	10	0
	-2	-2	0	-10	
	1	0	5	0	

$$x^4 + x^2 - 20 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 5) \rightarrow \text{Raíces: } x_1 = 2; x_2 = -2$$

c)	1	1	-5	-5
	-1	-1	0	5
	1	0	-5	0

$$x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

$$x^3 + x^2 - 5x - 5 = (x + 1)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \rightarrow \text{Raíces: } x_1 = -1; x_2 = \sqrt{5} \\ x_3 = -\sqrt{5}$$

d)	1	0	0	0	-81
3		3	9	27	81
	1	3	9	27	0
-3		-3	0	-27	
	1	0	9	0	

$$x^4 - 81 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) \rightarrow \text{Raíces: } x_1 = 3; x_2 = -3$$

6 Sacar factor común y utilizar los productos notables para factorizar los polinomios siguientes:

a)  $x^3 - x$

b)  $4x^4 - 16x^2$

c)  $x^3 + 2x^2 + x$

d)  $3x^2 + 30x + 75$

e)  $5x^3 - 45x$

f)  $2x^3 - 8x^2 + 8x$

a)  $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

b)  $4x^4 - 16x^2 = 4x^2(x^2 - 4) = 4x^2(x - 2)(x + 2)$

c)  $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$

d)  $3x^2 + 30x + 75 = 3(x^2 + 10x + 25) = 3(x + 5)^2$

e)  $5x^3 - 45x = 5x(x^2 - 9) = 5x(x - 3)(x + 3)$

f)  $2x^3 - 8x^2 + 8x = 2x(x^2 - 4x + 4) = 2x(x - 2)^2$

7 Efectúa las siguientes operaciones reduciendo al mínimo común denominador:

a)  $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{2x} + \frac{1}{3x}$

b)  $\frac{2x-1}{x^2} - \frac{x-3}{2x}$

c)  $\frac{x+2}{x} - \frac{1}{x-1}$

d)  $\frac{1}{2x+4} - \frac{2}{3x+6}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{2x} + \frac{1}{3x} &= \frac{6(x-1)}{6x} - \frac{3(x+1)}{6x} + \frac{2}{6x} = \\ &= \frac{6x-6-3x-3+2}{6x} = \frac{3x-7}{6x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2x-1}{x^2} - \frac{x-3}{2x} &= \frac{2(2x-1)}{2x^2} - \frac{x(x-3)}{2x^2} = \\ &= \frac{4x-2-x^2+3x}{2x^2} = \frac{-x^2+7x-2}{2x^2} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} = \frac{x^2+x-2-x}{x(x-1)} = \frac{x^2-2}{x^2-x}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1}{2x+4} - \frac{2}{3x+6} &= \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+2)} = \\ &= \frac{3}{6(x+2)} - \frac{4}{6(x+2)} = \frac{-1}{6(x+2)} = \frac{-1}{6x+12} \end{aligned}$$

8 Descompón en factores y simplifica las siguientes fracciones:

$$\text{a) } \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\text{b) } \frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$$

$$\text{c) } \frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$$

$$\text{d) } \frac{x^2+x-6}{x-2}$$

$$\text{a) } \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1}$$

$$\text{b) } \frac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x-2}{x+2}$$

$$\text{c) } \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}$$

$$\text{d) } \frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = x+3$$

9 Cada una de las fracciones  $A$ ,  $B$ ,  $C$  es equivalente a una de las fracciones I, II, III.

Asocia cada una con su equivalente:

$$A = \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x^2-4)(x+1)}$$

$$\text{I} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$B = \frac{x-2}{2-x}$$

$$\text{II} = \frac{x-1}{x+2}$$

$$C = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$$

$$\text{III} = -1$$

$$A = \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \frac{x-1}{x+2} = \text{II}$$

$$B = \frac{x-2}{2-x} = \frac{-(2-x)}{2-x} = -1 = \text{III}$$

$$C = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} = \text{I}$$

10 Opera y simplifica:

$$\text{a) } \frac{3}{x} : \frac{x-3}{x}$$

$$\text{b) } \frac{x+1}{3} \cdot \frac{15}{x^2-1}$$

$$\text{c) } \left(\frac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^3$$

$$\text{d) } \frac{x-2}{x} : \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$$

$$\text{a) } \frac{3}{x} : \frac{x-3}{x} = \frac{3x}{x(x-3)} = \frac{3}{x-3}$$

$$\text{b) } \frac{x+1}{3} \cdot \frac{15}{x^2-1} = \frac{15(x+1)}{3(x-1)(x+1)} = \frac{5}{3(x-1)}$$

$$c) \left(\frac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^3 = \frac{x^6}{36} \cdot \frac{27}{x^3} = \frac{27x^6}{36x^3} = \frac{3x^3}{4}$$

$$d) \frac{x-2}{x} : \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 = \left(\frac{x-2}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{x-2}$$

11 Reduce al mínimo común denominador y opera:

$$a) \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-1}$$

$$b) \frac{1-x}{x+3} + \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}$$

$$c) \frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{2x-3}{x-1} + 3$$

$$a) \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2 - 3(x-1) + (x-2)}{x^2-1} =$$

$$= \frac{x^2+2x+1-3x+3+x-2}{x^2-1} = \frac{x^2+2}{x^2-1}$$

$$b) \frac{1-x}{x+3} + \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-6} = \frac{(1-x)(x-2) + 2x(x+3) - (x^2+5x-10)}{(x+3)(x-2)} =$$

$$= \frac{-x^2+3x-2+2x^2+6x-x^2-5x+10}{(x+3)(x-2)} = \frac{4x+8}{x^2+x-6}$$

$$c) \frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{2x-3}{x-1} + 3 = \frac{x^2(x-1) - (2x-3)(x+1)^2 + 3(x+1)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} =$$

$$= \frac{x^3-x^2 - (2x-3)(x^2+2x+1) + 3(x^2+2x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} =$$

$$= \frac{x^3-x^2-2x^3-4x^2-2x+3x^2+6x+3+3x^3-3x^2+6x^2-6x+3x-3}{(x+1)^2(x-1)} =$$

$$= \frac{2x^3+x^2+x}{(x+1)^2(x-1)}$$

12 Expresa las siguientes fracciones en la forma  $\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$ :

$$a) \frac{4x^2-4x+1}{2x+1}$$

$$b) \frac{6x^3+5x^2-9x}{3x-2}$$

$$c) \frac{15x-2x^3-4+x^4}{x-2}$$

$$d) \frac{18+2x^3-5x^2}{2x+3}$$

$$a) \begin{array}{r} 4x^2-4x+1 \quad | \quad 2x+1 \\ -4x^2-2x \quad \quad \quad 2x-3 \\ \hline -6x+1 \\ \quad \quad \quad 6x+3 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad 4 \end{array}$$

$$\frac{4x^2-4x+1}{2x+1} = 2x - 3 + \frac{4}{2x+1}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b) } 6x^3 + 5x^2 - 9x \quad | \quad 3x - 2 \\
 \underline{-6x^3 + 4x^2} \qquad \qquad 2x^2 + 3x - 1 \\
 \qquad \qquad \qquad 9x^2 - 9x \\
 \underline{\qquad \qquad -9x^2 + 6x} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad -3x \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{3x - 2} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad -2
 \end{array}$$

$$\frac{6x^3 + 5x^2 - 9x}{3x - 2} = 2x^2 + 3x - 1 + \frac{-2}{3x - 2}$$

$$\text{c) } 15x - 2x^3 - 4 + x^4 = x^4 - 2x^3 + 15x - 4$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & 0 & 15 & -4 \\
 2 & & 2 & 0 & 0 & 30 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 0 & 15 & 26
 \end{array}$$

$$\frac{15x - 2x^3 - 4 + x^4}{x - 2} = x^3 + 15 + \frac{26}{x - 2}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{d) } 2x^3 - 5x^2 \quad + 18 \quad | \quad 2x + 3 \\
 \underline{-2x^3 - 3x^2} \qquad \qquad \qquad x^2 - 4x + 6 \\
 \qquad \qquad \qquad -8x^2 \quad + 18 \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{8x^2 + 12x} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad 12x + 18 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \underline{-12x - 18} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}$$

$$\frac{18 + 2x^3 - 5x^2}{2x + 3} = x^2 - 4x + 6$$

## Página 86

### PARA RESOLVER

13 Calcula, en cada caso, el valor de  $m$  para que las siguientes divisiones sean exactas:

a)  $(2x^3 - 9x^2 + 2x + m) : (x - 4)$

b)  $(x^4 + 3x^3 + mx - 3) : (x + 3)$

c)  $(4x^3 + mx^2 - 2x + 1) : (x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 \text{a) } & 2 & -9 & 2 & m \\
 4 & & 8 & -4 & -8 \\
 \hline
 & 2 & -1 & -2 & m - 8
 \end{array}$$

$$m - 8 = 0 \rightarrow m = 8$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 3 & 0 & m & -3 \\
 -3 & & -3 & 0 & 0 & -3m \\
 \hline
 & 1 & 0 & 0 & m & -3m-3
 \end{array}$$

$$-3m - 3 = 0 \rightarrow m = -1$$

c)  $P(x) = 4x^3 + mx^2 - 2x + 1$

$$P(-1) = -4 + m + 2 + 1 = m - 1 = 0 \rightarrow m = 1$$

- 14 El resto de la división  $(-x^3 + 3x^2 + kx + 7) : (x + 2)$  es igual a  $-7$ . ¿Cuánto vale  $k$ ?

Si llamamos  $P(x) = -x^3 + 3x^2 + kx + 7$ , entonces:

$$P(-2) = 8 + 12 - 2k + 7 = 27 - 2k = -7 \rightarrow k = 17$$

- 15 Calcula el valor numérico del polinomio  $5x^3 + 2x^2 - 3x + 4$  para  $x = -3,4$ .

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -3,4 & 5 & 2 & -3 & 4 \\
 & & -17 & 51 & -163,2 \\
 \hline
 & 5 & -15 & 48 & -159,2
 \end{array}$$

Si  $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ , entonces  $P(-3,4) = -159,2$

- 16 Halla el valor que ha de tener  $m$  para que el resto de la división  $(3x^3 + mx^2 + x - 4) : (x - 3)$  sea igual a  $5$ .

Si llamamos  $P(x) = 3x^3 + mx^2 + x - 4$ , entonces

$$P(3) = 81 + 9m + 3 - 4 = 80 + 9m = 5 \rightarrow m = \frac{-75}{9} = \frac{-25}{3}$$

- 17 Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a)  $2x^6 - 14x^4 + 12x^3$

b)  $6x^3 + 7x^2 - x - 2$

c)  $x^5 - 16x$

a)  $2x^6 - 14x^4 + 12x^3 = 2x^3(x^3 - 7x + 6) = 2x^3(x - 1)(x - 2)(x + 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -7 & 6 \\
 1 & & 1 & 1 & -6 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -6 & 0 \\
 2 & & 2 & 6 & \\
 \hline
 & 1 & 3 & 0 & 
 \end{array}$$

Raíces:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 1$

$x_3 = 2$ ;  $x_4 = -3$



$$\text{b) } \begin{array}{c|cccc} & 6 & 7 & -1 & -2 \\ -1 & & -6 & -1 & 2 \\ \hline & 6 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$6x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 6x^3 + 7x^2 - x - 2 &= (x-1)(6x^2 + x - 2) = (x-1)6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = \\ &= (x-1)(2x-1)(3x+2) \end{aligned}$$

$$\text{Raíces: } x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{2}; x_3 = \frac{-2}{3}$$

$$\text{c) } x^5 - 16x = x(x^4 - 16) = x(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ -2 & & -2 & 0 & -8 & \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Raíces: } x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -2$$

### 18 Opera y simplifica:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) : \frac{x}{x+1}$$

$$\text{b) } \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right) : \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] : (x^2 - 1)$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\text{d) } \left[\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] (x-1)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) : \frac{x}{x+1} &= \frac{x+1-2x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} = \\ &= \frac{-x+1}{x^2-1} : \frac{x}{x+1} = \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} : \frac{x}{x+1} = \\ &= \frac{-1}{x+1} : \frac{x}{x+1} = \frac{-(x+1)}{x(x+1)} = \frac{-1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \left[ \left( 1 - \frac{1}{x} \right) : \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] : (x^2 - 1) &= \left[ \frac{x-1}{x} : \frac{x+1}{x} \right] : (x^2 - 1) = \frac{x(x-1)}{x(x+1)} : (x^2 - 1) = \\
 &= \frac{x-1}{x+1} : (x^2 - 1) = \frac{x-1}{(x+1)(x^2 - 1)} = \\
 &= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) : \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) &= \frac{x-1-x-1}{x^2-1} : \frac{x+1+x-1}{x^2-1} = \\
 &= \frac{-2}{x^2-1} : \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2(x^2-1)}{2x(x^2-1)} = \frac{-1}{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \left[ \left( x + \frac{1}{x} \right) : \left( x - \frac{1}{x} \right) \right] (x-1) &= \left[ \frac{x^2+1}{x} : \frac{x^2-1}{x} \right] (x-1) = \frac{x(x^2+1)}{x(x^2-1)} \cdot (x-1) = \\
 &= \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} \cdot (x-1) = \frac{x^2+1}{x+1}
 \end{aligned}$$

19 Completa las siguientes igualdades de modo que obtengas fracciones equivalentes:

$$\text{a) } \frac{3x}{2x-5} = \frac{?}{6x-15}$$

$$\text{b) } \frac{x^2-4}{?} = \frac{x-2}{2}$$

$$\text{c) } \frac{2x}{x+1} = \frac{?}{x^2+x}$$

$$\text{d) } \frac{1}{5-x} = \frac{x}{?}$$

$$\text{a) } \frac{3x}{2x-5} = \frac{3 \cdot 3x}{3(2x-5)} = \frac{9x}{6x-15}$$

$$\text{b) } \frac{x-2}{2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2(x+2)} = \frac{x^2-4}{2x+4}$$

$$\text{c) } \frac{2x}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2+x}$$

$$\text{d) } \frac{1}{5-x} = \frac{x}{5x-x^2}$$

20 Simplifica:

$$\text{a) } \frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2}$$

$$\text{b) } \frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}$$

$$\text{a) } \frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2} = \frac{(x-4)(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{x-4}{x^2}$$

$$\text{b) } \frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7} = \frac{(x-7)(x+6)}{(x-7)(x-1)} = \frac{x+6}{x-1}$$

21 Justifica, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:

a)  $\frac{x}{x-1}$  y  $\frac{x^2}{(x-1)^2}$

b)  $\frac{x-2}{x+1}$  y  $\frac{x}{x+3}$

c)  $\frac{3x}{2x-1}$  y  $\frac{-6x}{2-4x}$

d)  $\frac{x^3-x^2}{x^3-x}$  y  $\frac{x}{x+1}$

a)  $\left. \begin{aligned} x(x-1)^2 &= x(x^2-2x+1) = x^3-2x^2+x \\ x^2(x-1) &= x^3-x^2 \end{aligned} \right\}$  No son equivalentes.

b)  $\left. \begin{aligned} (x-2)(x+3) &= x^2+x-6 \\ x(x+1) &= x^2+x \end{aligned} \right\}$  No son equivalentes.

c)  $\left. \begin{aligned} 3x(2-4x) &= 6x-12x^2 \\ (2x-1)(-6x) &= -12x^2+6x \end{aligned} \right\}$  Sí son equivalentes.

d)  $\left. \begin{aligned} (x^3-x^2)(x+1) &= x^4+x^3-x^3-x^2 = x^4-x^2 \\ (x^3-x)x &= x^4-x^2 \end{aligned} \right\}$  Sí son equivalentes.

22 Opera y simplifica:

a)  $\frac{3a+3}{12a-12} : \frac{(a+1)^2}{a^2-1}$

b)  $\frac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2-1}$

c)  $\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x^2-3x+2}$

a)  $\frac{3a+3}{12a-12} : \frac{(a+1)^2}{a^2-1} = \frac{(3a+3)(a^2-1)}{(12a-12)(a+1)^2} = \frac{3(a+1)^2(a-1)}{12(a-1)(a+1)^2} = \frac{1}{4}$

b)  $\frac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2-1} = \frac{(x+3)(x-1)(x-2)^2}{(x-2)^3(x+1)(x-1)} = \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+3}{x^2-x-2}$

c)  $\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x(x-1) - x(x-2) - x}{(x-2)(x-1)} = \frac{x^2-x-x^2+2x-x}{(x-2)(x-1)} = 0$

23 Indica cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:

a)  $2x(x^2+4)$

b)  $(x-2)^2(2x-7)$

c)  $x^2(x^2-3)$

d)  $(x^2-4)(x^4+1)$

a)  $x = 0$

c)  $x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{3}; x_3 = \sqrt{3}$

b)  $x_1 = 2; x_2 = \frac{7}{2}$

d)  $x_1 = 2; x_1 = -2$

24 **Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo en cada caso:**

a)  $x^4 - 4x^2$ ;  $x^3 - 4x^2 + 4x$                       b)  $x^2 - 3x$ ;  $x^2 - 9$ ;  $x^2 - 6x + 9$

c)  $9x^4 + 9x^3$ ;  $3x^2$ ;  $6x^5 + 6x^4$

a)  $x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$

$x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2$

M.C.D. =  $x(x - 2)$

m.c.m. =  $x^2(x - 2)^2(x + 2)$

b)  $x^2 - 3x = x(x - 3)$

$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

M.C.D. =  $x - 3$

m.c.m. =  $x(x - 3)^2(x + 3)$

c)  $9x^4 + 9x^3 = 9x^3(x + 1)$

$3x^2$

$6x^5 + 6x^4 = 6x^4(x + 1)$

M.C.D. =  $3x^2$

m.c.m. =  $18x^4(x + 1)$

25 **En una división de polinomios el divisor es  $3x^2 - 1$ , el cociente  $2x - 3$  y el resto  $-x + 1$ . Halla el dividendo.**

$(3x^2 - 1)(2x - 3) + (-x + 1) = 6x^3 - 6x^2 - 2x + 3 - x + 1 = 6x^3 - 6x^2 - 3x + 4$

26 **Si en una división de polinomios el dividendo es  $x^3 - 3x^2 - 4$ , el cociente  $x^2 - x - 2$  y el resto  $-8$ , ¿cuál es el divisor?**

Dividendo = divisor · cociente + resto

$\frac{\text{Dividendo} - \text{resto}}{\text{Cociente}} = \text{divisor}$

$\frac{x^3 - 3x^2 - 4 - (-8)}{x^2 - x - 2} = \frac{x^3 - 3x^2 - 4 + 8}{x^2 - x - 2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - x - 2} = x - 2$

$x^3 - 3x^2 \quad + 4 \quad | \quad x^2 - x - 2$

$-x^3 + x^2 + 2x \quad \quad \quad x - 2$

$\hline -2x^2 + 2x + 4$

$2x^2 - 2x - 4$

$\hline 0$

divisor =  $x - 2$

27

Opera y simplifica:

$$\text{a) } \left(1 - \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+2}\right) : \frac{1}{x+2}$$

$$\text{b) } \left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x+2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(1 - \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+2}\right) : \frac{1}{x+2} &= \left(1 - \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}\right) : \frac{1}{x+2} = \\ &= \frac{x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2} : \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+2)^2} : \frac{1}{x+2} = \frac{x+2}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x+2}\right) &= \frac{(x+1)(x+2) - x^2}{x(x+2)} : \frac{x+2+x}{x+2} = \\ &= \frac{x^2 + 3x + 2 - x^2}{x(x+2)} : \frac{2x+2}{x+2} = \\ &= \frac{3x+2}{x(x+2)} : \frac{2x+2}{x+2} = \frac{(3x+2)(x+2)}{x(x+2)(2x+2)} = \\ &= \frac{3x+2}{x(2x+2)} = \frac{3x+2}{2x^2+2x} \end{aligned}$$