HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES

MATEMÁTICAS aplicadas a las CIENCIAS SOCIALES

1

Evaluación

sm

BACHILLERATO

Índice

Prueba inicial (aritmética y álgebra)

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. En un triángulo isósceles de perímetro 14 cm, el lado desigual mide 4 cm.

a) Calcula la longitud de la altura correspondiente al lado desigual y exprésala de forma exacta.

b) Da una aproximación, por defecto, a dicha longitud con dos cifras decimales exactas.

c) Da una aproximación, por exceso, a dicha longitud con dos cifras decimales exactas.

d) Da una aproximación, por redondeo, al área de dicho triángulo con dos cifras decimales.

2. Realiza las siguientes operaciones simplificando al máximo los resultados.

a) $\dfrac{8^5 \cdot 32 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3}{4^2 \cdot 2^5}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[4]{5^3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{2^4} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[5]{2}}$

3. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}301$ y $\log 3 = 0{,}477$, utiliza las propiedades de los logaritmos y calcula:

$\log 5 \qquad \log 6 \qquad \log 8 \qquad \log 0{,}06$

4. Dados los polinomios $P(x) = x^2 - 4$ y $Q(x) = x - 2$, halla:

a) $P(x) - 2Q(x)$ b) $P(x) \cdot Q(x)$ c) $P(x) : Q(x)$ d) $[P(x)]^2$

5. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones algebraicas simplificando los resultados.

$$\frac{2x}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2}$$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

a) $\dfrac{5(2x - 3)}{3} - \dfrac{4x - 2}{2} = x - 3$

b) $x^4 + 8x^2 + 7 = 0$

c) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 5x - 4x = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(x - 3) + y - 5 = x + 1 \\ 3(y - 1) - 2x = y + 1 \end{cases}$

7. Resuelve las siguientes inecuaciones y sistemas de inecuaciones.

a) $\dfrac{4 - 2x}{5} \geqslant x - 2$ b) $4 - 2x > x^2 + 1$ c) $\begin{cases} x + 3 > -3 \\ 6x - 2 \leqslant x + 8 \end{cases}$

8. La suma de las dos cifras de un número es 10, y la diferencia entre dicho número y el que se obtiene al invertir el orden de sus cifras es 36. Calcula dicho número.

Soluciones

1. Cada uno de los lados iguales mide $14 = 2a + 4 \Rightarrow a = 5$ cm.

a) Por el teorema de Pitágoras: $25 = 4 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{21}$ cm

b) $\sqrt{21} \approx 4{,}582$ cm

c) $\sqrt{21} \approx 4{,}583$ cm.

d) $S = \frac{4h}{2} = 2h = 9{,}17\ \text{cm}^2$

2. a) $$\frac{8^5 \cdot 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3}{4^2 \cdot 2^5} = \frac{(2^3)^5 \cdot 2^5 \cdot \frac{1}{2^3}}{(2^2)^2 \cdot 2^5} = \frac{\frac{2^{15} \cdot 2^5}{2^3}}{2^4 \cdot 2^5} = \frac{2^{14}}{2^9} = 2^5$$

b) $$\frac{\sqrt[3]{3^5} \cdot \sqrt[4]{5^3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{2^4} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[5]{2}} = \frac{3^{\frac{5}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{\frac{5}{3} - \frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}}{2^{\frac{5}{5}}} = \frac{3^{\frac{7}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt[6]{3^7} \cdot \sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt{5}}{2} =$$

$$= \frac{3\sqrt[6]{3 \cdot 5^3}}{2} = \frac{3\sqrt[6]{375}}{2}$$

3. $\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$

$\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$

$\log 8 = \log(2^3) = 3 \log 2 = 3 \cdot 0{,}301 = 0{,}903$

$\log 0{,}06 = \log\left(\frac{6}{100}\right) = \log 6 - \log 100 = 0{,}778 - 2 = -1{,}222$

4. a) $P(x) - 2Q(x) = x^2 - 4 - 2(x - 2) = x^2 - 2x$

b) $P(x) : Q(x) = (x + 2) \cdot (x - 2) : (x - 2) = x + 2$

c) $P(x) \cdot Q(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

d) $[P(x)]^2 = (x^2 - 4)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$

5. $$\frac{2x}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2} = \frac{2x}{(x + 2)(x - 2)} \cdot \frac{(x - 1)(x - 2)}{x^2(x - 1)} = \frac{2x(x - 1)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)x^2(x - 1)} = \frac{2}{x(x + 2)}$$

6. a) $\frac{5(2x - 3)}{3} - \frac{4x - 2}{2} = x - 3 \Rightarrow \frac{20x - 30 - 12x + 6}{6} = \frac{6x - 18}{6} \Rightarrow 8x - 24 = 6x - 18 \Rightarrow x = 3$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \overset{x^2 = z}{\Rightarrow} z^2 - 8z - 9 = 0 \Rightarrow z = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \begin{cases} z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3;\ x = -3 \\ z = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} / x^2 = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 5x - 4y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y \\ 5(1 + 2y) - 4y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y \\ 6y = -6 \end{cases} \Rightarrow x = -1;\ y = -1$

d) $\begin{cases} 2(x - 3) + y - 5 = x + 1 \\ 3(y - 1) - 2x = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6 + y - 5 = x + 1 \\ 3y - 3 - 2x = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 5;\ y = 7$

7. a) $\frac{4 - 2x}{5} \geqslant x - 2 \Rightarrow 4 - 2x \geqslant 5x - 10 \Rightarrow -7x \geqslant -14 \Rightarrow x \leqslant 2$

Solución: $x \in (-\infty, 2]$

b) $4 - 2x > x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 3) < 0$

Solución: $x \in (-3, 1)$

$-\infty$ -3 1 $+\infty$

$x + 3$	−	+	+
$x - 1$	−	−	+
$(x + 3)(x - 1)$	+	−	+

c) $\begin{cases} x + 3 > -3 \\ 6x - 2 \leqslant x + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -6 \\ 5x \leqslant 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x \leqslant 2 \end{cases} \Rightarrow$ Solución: $x \in (-6, 2]$

8. $\begin{cases} N = 10a + b \\ N' = 10b + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 10 \\ N - N' = 9a - 9b = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 10 \\ a - b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow N = 73$

1 Números reales

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Encontrar la fracción generatriz de una expresión decimal exacta o periódica.	**1.** Encuentra la fracción generatriz de los siguientes números decimales. a) 3,456 b) $5,\widehat{3}$ c) $0,2\widehat{14}$
B. Saber distinguir números racionales de números irracionales utilizando las caracterizaciones decimales.	**2.** a) La suma de dos números irracionales ¿puede ser racional? b) El producto de dos números irracionales ¿puede ser racional? c) La suma de dos números racionales ¿puede ser irracional? d) El producto de dos números racionales ¿puede ser irracional? Pon ejemplos que aclaren cada una de tus respuestas.
C. Ordenar un conjunto de números reales y aplicar los distintos métodos de representarlos en la recta real.	**3.** Ordena de menor a mayor y representa en la recta real los siguientes números reales. $\sqrt{5} \quad \frac{3}{7} \quad -\sqrt{7} \quad -\frac{4}{3} \quad 1{,}28 \quad \frac{-\pi}{3} \quad 2{,}\widehat{6} \quad \frac{\pi}{2}$
D. Operar con aproximaciones decimales por exceso y por defecto y determinar, o al menos acotar, los errores cometidos.	**4.** a) Da las aproximaciones por defecto y por exceso, con una, dos, tres y cuatro cifras decimales de $\sqrt{7}$ y π. b) Calcula aproximaciones de tres cifras por exceso y por defecto de: $\sqrt{7} + \pi \qquad \sqrt{7} \cdot \pi$
E. Manejar con fluidez y simplificar expresiones en las que intervengan potencias y radicales. Usar indistintamente expresiones radicales y sus equivalentes en forma potencial.	**5.** Expresa $\frac{9^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^4 \cdot 27^{-\frac{5}{6}}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}$ en forma de radical. **6.** Efectúa las siguientes operaciones, simplificando tanto como puedas los resultados. a) $\frac{1}{3}\sqrt{45} + 2\sqrt{125} - 4\sqrt{20} - \sqrt{5} + \frac{3}{7}\sqrt{245}$ b) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{\frac{3}{4}}$
F. Realizar operaciones con cantidades dadas en notación científica.	**7.** Opera, expresando el resultado en notación científica: $\frac{3{,}15 \cdot 10^7 + 1{,}2 \cdot 10^8 - 9 \cdot 10^6}{1{,}5 \cdot 10^{-2}}$
G. Conocer el significado del valor absoluto y emplearlo en la descripción de algunos subconjuntos de la recta real (entornos, intervalos y semirrectas).	**8.** Escribe en forma de intervalo y representa en la recta real los siguientes conjuntos numéricos. a) $\lvert x \rvert > 5$ b) $\lvert x + 2 \rvert \leqslant 2$ c) $\{x \in \mathrm{R} / -3 \leqslant x < 5\}$ **9.** Calcula los valores de x que satisfacen la igualdad $x - \lvert 3x - 5 \rvert = -1$
H. Utilizar los números reales para representar e intercambiar información, y para resolver problemas cotidianos o que tengan relación con otras disciplinas.	**10.** a) La masa de la Tierra es $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg y la de Júpiter $1{,}90 \cdot 10^{27}$. ¿Cuántas veces es mayor la masa de Júpiter que la de la Tierra? b) Se conoce como unidad astronómica (UA) a la distancia media de la Tierra al Sol, y equivale aproximadamente a $1{,}5 \cdot 10^8$ km. Sabiendo que Venus se encuentra a una distancia media del sol de 0,723332 UA calcula, en km, su distancia media al Sol.

Soluciones

1. a) $3{,}456 = \dfrac{3456}{1000} = \dfrac{432}{125}$

b)
$$\begin{array}{r}10x = 53{,}3333\ldots\\ x = 5{,}3333\ldots\\ \hline 9x = 48\end{array}$$

$$x = \frac{48}{9}$$

c)
$$\begin{array}{r}x = 0{,}2141414\ldots\\ 10x = 2{,}14141414\ldots\\ 1000x = 214{,}14141414\ldots\\ \hline 990x = 212\end{array}$$

$$x = \frac{212}{990} = \frac{106}{495}$$

2. a) Sí.

Ej: π y $1 - \pi$; $\pi + (1 - \pi) = 1 \in \mathbb{Q}$

b) Sí.

Ej: $\sqrt{5} \in \mathbb{I}$ y $\sqrt{20} \in \mathbb{I}$;

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10 \in \mathbb{Q}$

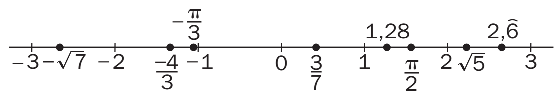
c) No.

Todo número racional admite una expresión fraccionaria y la suma de dos fracciones es una fracción.

d) No.

Todo número racional admite una expresión fraccionaria y el producto de dos fracciones es una fracción.

3. $-\sqrt{7} < -\dfrac{4}{3} < \dfrac{-\pi}{3} < \dfrac{3}{7} < 1{,}28 < \dfrac{\pi}{2} < \sqrt{5} < 2{,}\widehat{6}$



4. a)

$\sqrt{7}$	s_d	2,6	2,64	2,645
	S_e	2,7	2,65	2,646
π	s_d	3,1	3,14	3,141
	s_d	3,2	3,15	3,142

b)

$\sqrt{7} + \pi$	s_d	5,7	5,78	5,786
	S_e	5,9	5,80	5,788
	E	0,2	0,02	0,002
$\sqrt{7} \cdot \pi$	s_d	8,06	8,2896	8,307945
	s_d	8,64	8,3475	8,313732
	E	0,58	0,0579	0,005787

5. $\dfrac{9^{\frac{-1}{3}} \cdot 3^4 \cdot 27^{\frac{-5}{6}}}{(\sqrt[3]{3})^2} = \dfrac{3^{\frac{-2}{3}} \cdot 3^4 \cdot 3^{\frac{-15}{6}}}{3^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{3^{\frac{5}{6}}}{3^{\frac{2}{3}}} = 3^{\frac{5-4}{6}} =$

$= 3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3}$

6. a) $\dfrac{1}{3}\sqrt{45} + 2\sqrt{125} - 4\sqrt{20} - \sqrt{5} + \dfrac{3}{7}\sqrt{245} =$

$= \dfrac{1}{3}\sqrt{3^2 \cdot 5} + 2\sqrt{5^3} + 4\sqrt{2^2 \cdot 5} - \sqrt{5} + \dfrac{3}{7}\sqrt{5 \cdot 7^2} =$

$= \sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 8\sqrt{5} - \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

b) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{\dfrac{3}{4}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^6}{3^6}} \cdot \sqrt[12]{2^3} \cdot \sqrt[12]{\dfrac{3^2}{2^4}} =$

$= \sqrt[12]{\dfrac{2^6 \cdot 2^3 \cdot 3^2}{3^6 \cdot 2^4}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^5}{3^4}}$

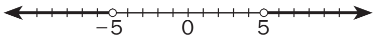
7. $\dfrac{3{,}15 \cdot 10^7 + 1{,}2 \cdot 10^8 - 9 \cdot 10^6}{1{,}5 \cdot 10^{-2}} =$

$= \dfrac{3{,}15 \cdot 10^6 + 120 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^6}{1{,}5 \cdot 10^{-2}} =$

$= \dfrac{142{,}5 \cdot 10^6}{1{,}5 \cdot 10^{-2}} = 95 \cdot 10^8 = 9{,}5 \cdot 10^9$

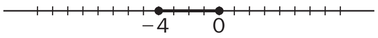
8. a) $|x| > 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x/x < -5\} \cup \{x/x > 5\} = (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$

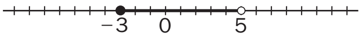


b) $|x + 2| \leqslant 2 \Rightarrow -2 \leqslant x + 2 \leqslant 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 \leqslant x \leqslant 0 \Rightarrow [-4, 0]$



c) $-3 \leqslant x < 5 \Rightarrow [-3, 5)$



9. $x - |3x - 5| = \begin{cases} x + 3x - 5 & \text{si } 3x < 5 \\ x - 3x + 5 & \text{si } 3x \geqslant 5 \end{cases} =$

$$= \begin{cases} 4x - 5 & \text{si } x < \dfrac{5}{3} \\ -2x + 5 & \text{si } x \geqslant \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$4x - 5 = -1 \Rightarrow x = 1$

$-2x + 5 = -1 \Rightarrow x = 3$

Las dos soluciones son válidas.

10. a) $\dfrac{1{,}90 \cdot 10^{27}}{5{,}98 \cdot 10^{24}} = 317{,}72575 \cdot 10^3 = 3{,}1772575 \cdot 10^5$

La masa de La Tierra es, aproximadamente $3{,}18 \cdot 10^5$ mayor que la de Júpiter.

b) $(0{,}723332) \cdot (1{,}5 \cdot 10^8) = 1{,}084998 \cdot 10^8$

La distancia de Venus al Sol es de aproximadamente 108 499 800 km.

2 Matemática financiera

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Aplicar las propiedades de los logaritmos en la resolución de problemas de cálculo aritmético.	**1.** Sabiendo que log 2 = 0,301030 y que log 3 = 0,4774; calcula, utilizado las propiedades de los logaritmos, los siguientes casos. a) log 6 b) log 72 c) $\log \sqrt[5]{\frac{432}{9}}$
B. Calcular las cantidades iniciales o finales de los porcentajes en situaciones de incrementos y disminuciones porcentuales.	**2.** María ha pagado por su nuevo ordenador 699,60 euros. Si en la tienda le han aplicado un descuento del 12%, ¿cuál era el precio inicial del ordenador? **3.** Un líquido se evapora a razón del 5% cada hora. Si en un recipiente hay 200 litros: a) ¿Cuántos quedarán al cabo de 5 horas? b) ¿Al cabo de cuántas horas quedarán menos de 100 litros?
C. Calcular las cantidades iniciales o finales o de los porcentajes en situaciones de varios incrementos o disminuciones porcentuales sucesivas	**4.** Cierto producto, que el 1 de enero estaba marcado con un precio de 170 euros, ha sufrido las siguientes variaciones en su precio: con motivo de las rebajas de enero se le rebajó un 20%; en el mes de marzo subió un 15 % y por último, en las rebajas de verano, que fue cuando lo compramos, estaba rebajado un 10%. a) ¿A qué precio lo compramos? b) ¿Qué porcentaje de subida o bajada ha experimentado el producto desde el 1 de enero hasta el día en que lo compramos?
D. Determinar el término general de una progresión geométrica.	**5.** Calcula el término general y la suma de los seis primeros términos de la progresión: $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$
E. Calcular la suma de *n* términos de una progresión geométrica.	**6.** Sabiendo que el quinto término de una progresión geométrica es $\frac{2}{81}$ y la razón $\frac{1}{3}$, halla la suma de los 6 primeros términos de la sucesión.
F. Determinar capitales finales, iniciales, intereses o tiempos de imposición en problemas de interés simple y compuesto.	**7.** Calcula el tanto por ciento anual de interés simple al que se ha invertido, durante 5 meses, un capital de 36000 euros, con abono mensual de intereses, si se ha convertido en 37200 euros. **8.** Calcula el capital que se obtendrá al cabo de 10 años al colocar en una entidad financiera 20000 euros a interés compuesto del 5% anual, si los intereses se abonan semestralmente.
G. Determinar anualidades de amortización y capitalización.	**9.** Una persona recibe un préstamo de 10000 euros que se compromete a devolver en tres pagos iguales, que se harán al finalizar cada uno de los tres años sucesivos que siguen al préstamo, conviniendo que los intereses se calcularán al 5%. Calcula la anualidad a pagar cada año. **10.** ¿Qué suma debe depositar a principio de cada año, en un fondo de inversiones que abona el 6%, una persona de 50 años para que cuando se jubile a los 65 años haya reunido un capital de 65000 euros? **11.** Se solicita un préstamo de 18000 euros que se devolverá en tres anualidades a un tipo de interés del 6,5%. Calcula el capital amortizado en el segundo año.
H. Calcular la TAE a partir del tipo de interés y viceversa.	**12.** Manolo y Araceli están pensando en cambiar de banco su hipoteca. En el folleto de publicidad de un banco ven que ofrecen una hipoteca con una T.A.E. de 5,69% si los periodos de capitalización son mensuales. Si en el banco actual están pagando las mensualidades a un interés anual del 5%, ¿les es rentable cambiar de banco?

Soluciones

1. a) $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 =$

$= 0{,}3010 + 0{,}4774 = 0{,}7784$

b) $\log 72 = \log (2^3 \cdot 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 =$

$= 3 \log 2 + 2 \log 3 =$

$= 3 \cdot 0{,}3010 + 2 \cdot 0{,}4774 =$

$= 0{,}9030 + 0{,}9548 = 1{,}8578$

c) $$\log \sqrt[5]{\frac{432}{9}} = \log \left(\frac{432}{9}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log \frac{432}{9} =$$

$$= \frac{1}{5} \log 48 = \frac{1}{5} \log (2^4 \cdot 3) =$$

$$= \frac{1}{5}(4 \log 2 + \log 3) = 0{,}33628$$

2. Llamando x al precio inicial del ordenador:

$$0{,}88x = 699{,}60 \Rightarrow x = \frac{699{,}60}{0{,}88} = 795 \text{ €}$$

3. a) $F = 200(1 - 0{,}05)^5 = 200 \cdot 0{,}95^5 = 154{,}76$ L

b) $F \leqslant 100 \Rightarrow 200(1 - 0{,}05)^n \leqslant 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}95^n \leqslant 0{,}5; \ (\log 0{,}95 < 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow n \log 0{,}95 \geqslant \log 0{,}5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n \geqslant \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}95} = 13{,}51$$

Habrá menos de 100 L al cabo de 13 horas y media.

4. a) $P_F = 170(1 - 0{,}20)(1 + 0{,}15)(1 - 0{,}10) =$

$= 170 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}9 = 170 \cdot 0{,}828 = 140{,}76$ €

b) El índice de variación ha sido de 0,828; lo que equivale a una rebaja en el precio del 17,2%.

5. $$\frac{2}{3} : 1 = \frac{2}{3}; \ \frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3}; \ \frac{8}{27} : \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$$

Es una progresión geométrica de razón $\frac{2}{3}$; por tanto:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

6. $a_5 = \dfrac{2}{81}$ $\qquad r = \dfrac{1}{3}$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow \frac{2}{81} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 - 2}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{2\left(\frac{1 - 729}{729}\right)}{-\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{\frac{728}{729}}{\frac{1}{3}} = \frac{728}{243}$$

7. $C_f = 37\,200$ € $\qquad C_i = 36\,000$ €

$r = 5\%$ $\qquad t = 5 \text{ meses} = \dfrac{5}{12}$ años

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$$

$I = C_f - C_i = 37\,200 - 36\,000 = 1200$ €

$$1200 = \frac{36\,000 \cdot r \cdot 5}{1200} \Rightarrow 144\,000 = 180\,000r$$

$$\Rightarrow r = \frac{144}{18} = 8\%$$

8. $C_i = 20\,000$ € $\qquad t = 10$ años $\qquad r = 5\%$

Período capitalización: semestral

$$C_f = C_i\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{2k}$$

$$C_f = 20\,000\left(1 + \frac{5}{200}\right)^{20} =$$

$= 20\,000 \cdot 1{,}025^{20} = 32\,772{,}33$ €

9. $C = 10\,000$ € $\qquad t = 3$ años $\qquad r = 0{,}05$

$$a = \frac{Cr(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$$

$$a = \frac{10\,000 \cdot 0{,}05 \cdot (1 + 0{,}05)^3}{(1 + 0{,}05)^3 - 1} = 3672{,}86 \text{ €}$$

10. $C = 65\,000$ € $\qquad t = 15$ años $\qquad r = 0{,}06$

$$C = \frac{a((1 + r)^{n+1} - (1 + r))}{r}$$

$$a = \frac{Cr}{(1 + r)^{n+1} - (1 + r)} = \frac{65\,000 \cdot 0{,}06}{1{,}06^{16} - 1{,}06} =$$

$= 2654{,}31$ €

11. $C = 18\,000$ € $\qquad t = 3$ años $\qquad r = 0{,}065$

$$a = \frac{Cr(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$$

$$a = \frac{18\,000 \cdot 0{,}065 \cdot (1 + 0{,}065)^3}{(1 + 0{,}065)^3 - 1} = 6796 \text{ €}$$

Primer pago:

Intereses: $18\,000 \cdot 0{,}065 = 1170$ €

Capital amortizado: $6796 - 1170 = 5626$ €

Deuda pendiente: $18\,000 - 5626 = 12\,374$ €

Segundo pago:

Intereses: $12\,374 \cdot 0{,}065 = 804{,}31$ €

Capital amortizado: $6796 - 804{,}31 = 5991{,}69$ €

12. TAE = 5,69%

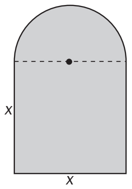
$$5{,}69 = \left[\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12} - 1\right]100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5{,}69}{100} + 1 = \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}$$

$$\sqrt[12]{1{,}0569} - 1 = \frac{r}{12} \Rightarrow r = 0{,}0555$$

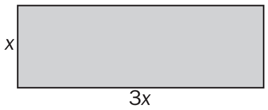
El interés que ofrece el banco del folleto es de 5,55%, por lo tanto les conviene mantener la hipoteca en el banco actual.

3 Expresiones algebraicas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Expresar mediante el lenguaje algebraico una relación dada mediante un enunciado.	**1.** Expresa mediante una expresión algebraica las siguientes situaciones: a) El área de un rectángulo de perímetro p cm, en el que el lado mayor es el triple que el lado menor. b) La suma de los cuadrados de tres números enteros consecutivos es igual a 77.
B. Conocer el grado del polinomio resultante de operar dos polinomios de grado conocido.	**2.** Calcular el grado de los polinomios P y Q si sabemos que el grado de $P \cdot Q$ es 8 y el grado del polinomio cociente al dividir P entre Q es 2.
C. Sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios.	**3.** Halla el cociente y el resto de dividir el polinomio $2x^3 + 3x^2 - 5$ entre $x^2 - x + 1$.
D. Aplicar las igualdades notables en el desarrollo de expresiones algebraicas.	**4.** Simplifica la siguiente expresión algebraica. $(2x^2 - 3)^2 + (2x + 3)^2 - 2(2x - 3)(2x + 3)$
E. Utilizar la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de la división de un polinomio por un binomio de la forma $x - a$.	**5.** Calcula el cociente y el resto en la siguiente división de polinomios. $(2x^4 - 3x^2 - 5x + 6) : (x + 1)$
F. Utilizar el teorema del resto en el cálculo de valores numéricos de un polinomio.	**6.** Aplicando el teorema del resto, calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7$ para $x = -5$.
G. Factorizar polinomios de segundo grado utilizando la fórmula, o de grado superior utilizando la regla de Ruffini.	**7.** Factoriza el polinomio $P(x) = 2x^4 - x^3 - 7x^2 + 6x$. **8.** Calcula k para que el polinomio $P(x) = x^4 - kx^3 + 2x - 1$ sea divisible por $x - 1$.
H. Calcular el m.c.d. y el m.c.m. de dos o tres polinomios.	**9.** Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios. $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 \qquad Q(x) = (x^2 - 9)(x - 1)$
I. Determinar si dos fracciones algebraicas son equivalentes.	**10.** Comprueba si las siguientes fracciones son equivalentes: $\dfrac{x^2 + 3x}{x - 2} \qquad \dfrac{x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 12x}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$
J. Operar con fracciones algebraicas simplificando los resultados.	**11.** Opera y simplifica: $\left(\dfrac{1}{x^2 - 1} - \dfrac{x}{x^2 - x}\right) : \left(\dfrac{x + 1}{(x - 1)^2} + \dfrac{1}{x - 1}\right)$
K. Resolver problemas empleando polinomios y fracciones algebraicas.	**12.** Se quiere vallar un campo que tiene la forma de la figura. Calcula en función de x el perímetro que hay que vallar. ¿Cuántos metros de valla metálica hay que poner si el lateral mide 25 metros? 

Soluciones

1. a)



$$p = 8x \Rightarrow x = \frac{p}{8}$$

$$S(x) = x \cdot 3x = 3x^2 = 3\left(\frac{p}{8}\right)^2$$

b) $(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 77$

2. $\text{gr}(P) = n; \qquad \text{gr}(Q) = m$

$\text{gr}(P \cdot Q) = \text{gr}(P) + \text{gr}(Q) = n + m = 8$

$\text{gr}(P : Q) = \text{gr}(P) - \text{gr}(Q) = n - m = 2$

Resolviendo el sistema, resulta:

$n = 5; \qquad m = 3$

3.

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +3x^2 & & -5 & x^2 - x + 1 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +2x^2 & -2x & & 2x + 5 \\ \cline{1-3}
 & 5x^2 & -2x & -5 & \\
 & -5x^2 & +5x & -5 & \\ \cline{2-4}
 & & 3x & -10 &
\end{array}$$

Cociente: $2x + 3$

Resto: $3x - 10$

4. $(2x^2 - 3)^2 + (2x + 3)^2 - 2(2x - 3)(2x + 3) =$

$= 4x^4 - 12x^2 + 9 + 4x^2 + 12x + 9 - 2(4x^2 - 9) =$

$= 4x^4 - 16x^2 + 12x + 36$

5.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 0 & -3 & -5 & 6 \\
-1 & & -2 & 2 & 1 & 4 \\ \hline
 & 2 & -2 & -1 & -4 & 10
\end{array}$$

$C = 2x^3 - 2x^2 - x - 4$

$R = 10$

6.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 0 & -2 & 5 & -7 \\
-5 & & -15 & 75 & -365 & 1800 \\ \hline
 & 3 & -15 & 73 & -360 & 1793
\end{array}$$

$P(-5) = 1793$

7. $P(x) = x(2x^3 - x^2 - 7x + 6)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & -7 & 6 \\
1 & & 2 & 1 & -6 \\ \hline
 & 2 & 1 & -6 & 0
\end{array}$$

$P(x) = x(x - 1)(2x^2 + x - 6)$

$2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = \frac{3}{2}$

$P(x) = x(x - 1)(x + 2)(2x - 3)$

8. Para que P sea divisible por $(x - 1)$, el resto de la división debe ser 0, por lo que aplicando el teorema del resto:

$0 = P(1) = 1 - k + 2 - 1$

$2 - k = 0 \Rightarrow k = 2$

9. $P(x)= (x - 1)^2(x + 3)$

$Q(x) = (x + 3)(x - 3)(x - 1)$

$\text{m.c.d.}(P(x),\ Q(x)) = (x + 3)(x - 1)$

$\text{m.c.m.}(P(x),\ Q(x)) = (x - 3)(x - 1)^2(x + 3)$

10.

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 12x}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} =$$

$$= \frac{x(x + 3)(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)^2(x + 2)} =$$

$$= \frac{x(x + 3)}{x - 2} = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$$

11.

$$\left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{x}{x^2 - x}\right) : \left(\frac{x + 1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{x - 1}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x}{x(x-1)}\right) : \left(\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right) : \left(\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\right) =$$

$$= \left(\frac{-x}{(x - 1)(x + 1)}\right) : \left(\frac{2x}{(x - 1)^2}\right) =$$

$$= \frac{-x(x - 1)^2}{2x(x - 1)(x + 1)} =$$

$$= \frac{-(x - 1)}{2(x + 1)}$$

12. $P(x) = \pi\left(\frac{x}{2}\right) + 3x$

$$P(25) = \frac{25\pi}{2} + 75 = \frac{150 + 25\pi}{2} \text{ m}$$

4 Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Resolver ecuaciones de segundo grado completas e incompletas.	**1.** Resuelve la siguiente ecuación. $(x - 2)^2 + x = 2\,[2 - (1 - x)^2]$
B. Determinar, sin resolverla, el número de soluciones de una ecuación de segundo grado.	**2.** Dada la ecuación de segundo grado $3x^2 - 6x + k = 0$, determina el valor de k para que dicha ecuación tenga una única solución.
C. Aplicar las fórmulas de Cardano-Vieta.	**3.** Halla un polinomio de segundo grado tal que la suma de sus raíces sea $\frac{10}{3}$ y el producto $-\frac{25}{3}$.
D. Resolver ecuaciones bicuadradas transformándolas en ecuaciones de segundo grado mediante el cambio de variable $z = x^2$.	**4.** Resuelve la siguiente ecuación. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
E. Resolver ecuaciones mediante factorización, empleando la regla de Ruffini.	**5.** Resuelve la siguiente ecuación polinómica. $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x = 6$
F. Resolver ecuaciones racionales y comprobar la validez de las soluciones obtenidas.	**6.** Resuelve la siguiente ecuación racional. $\frac{-1}{x + 1} - \frac{2}{x - 1} = \frac{3}{x^2 - 1}$
G. Resolver ecuaciones irracionales y comprobar la validez de las soluciones obtenidas.	**7.** Resuelve la siguiente ecuación irracional. $\sqrt{2x} - \sqrt{1 + x} = 1$
H. Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por sustitución y reducción, y de forma gráfica.	**8.** Resuelve algebraica y gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones. $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$
I. Resolver sistemas de segundo grado por sustitución o reducción.	**9.** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x - 2xy = 10 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$
J. Resolver sistemas lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas por el método de Gauss.	**10.** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 3x - 3y + z = -8 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$
K. Plantear y resolver problemas mediante las ecuaciones o sistemas de ecuaciones de los estudiados en esta unidad.	**11.** Reunidos todos los alumnos de 1.º de Bachillerato de un centro escolar, cinco séptimos de los mismos se apuntan para participar en el viaje de estudios que organiza el centro. La quinta parte de los alumnos apuntados no obtienen el permiso de sus padres para participar en el viaje y, por último, el día de la salida no se presentan 5 alumnos, con lo que al final son 115 los alumnos que emprenden el viaje. ¿Cuántos alumnos hay matriculados en 1.º de Bachillerato? **12.** El mercado de cierto producto presenta las siguientes funciones de oferta y demanda en función del precio p al que se vende el producto $O(p) = 3(10 - p)^2 - 273$; $D(p) = (15 - 8p)6$. El mercado se encontrará en equilibrio cuando la oferta sea igual a la demanda. Calcula el valor de p para que el mercado esté en equilibrio.

Soluciones

1. $(x - 2)^2 + x = 2[2 - (1 - x)^2]$

$x^2 - 4x + 4 + x = 2[2 - (1 - 2x + x^2)]$

$x^2 - 4x + 4 + x = -2x^2 + 4x + 2$

$3x^2 - 7x + 2 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

2. Para que la ecuación tenga solución única el discriminante debe valer 0

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k = 36 - 12k$; $\Delta = 0 \Rightarrow k = 3$

3. $x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{25}{3}$

4. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$; $z = x^2$

$z^2 - 5z - 36 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

$$\begin{cases} z = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \\ z = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow x \notin \mathrm{R} \end{cases}$$

5. Factorizamos el polinomio

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -5 & 5 & 5 & 6 \\ 1 & & 1 & -4 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 & \\ 2 & & 2 & -6 & & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & & \end{array}$$

$(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

Solución: $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$

6. $\dfrac{-1}{x + 1} - \dfrac{2}{x - 1} = \dfrac{3}{x^2 - 1}$

$$\frac{-x + 1}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{2x + 2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{3}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$\frac{-3x - 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{x^2 - 1}$$

$-3x = 4$

$x = -\frac{4}{3}$

7. $\sqrt{2x} - \sqrt{1 + x} = 1$

$\left(\sqrt{2x} - 1\right)^2 = \left(\sqrt{1 + x}\right)^2$

$2x + 1 - 2\sqrt{2x} = 1 + x \rightarrow x = 2\sqrt{2x} \rightarrow x^2 = 8x \rightarrow$

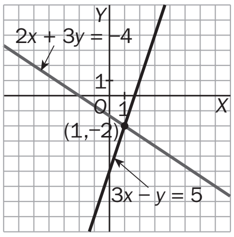
$\rightarrow x = 0, x = 8 \Rightarrow$ Solución válida: $x = 8$

8. $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 9x - 3y = 15 \end{cases}$

$11x = 11$

$x = 1$

$y = 3 \cdot 1 - 5 = -2$



9. $\begin{cases} x - 2xy = 10 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases} \Rightarrow 2x + 5y = 11 \Rightarrow y = \dfrac{11 - 2x}{5}$

$$x - 2\left(\frac{11 - 2x}{5}\right)x = 10 \Rightarrow 4x^2 - 17x - 50 = 0$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 + 800}}{8} = \frac{17 \pm 33}{8}$$

Soluciones: $x = \dfrac{25}{4}$, $y = -\dfrac{3}{10}$

$x = -2$, $y = 3$

10. $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 3x - 3y + z = -8 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -6 \\ 3x + 4y - z = 3 \\ 3x - 3y + z = -8 \end{cases}$

$$\begin{cases} E_1 \\ E_2 - 3E_1 \\ E_3 - 3E_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -6 \\ 7y - 7z = 21 \\ -5z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1 \\ \dfrac{E_2}{7} \\ \dfrac{E_3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -6 \\ y - z = 3 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

11. Sea x el número de alumnos de 1.º de Bachillerato.

Alumnos apuntados al viaje: $\frac{5}{7}x$

No obtienen permiso: $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{7}x = \frac{1}{7}x$

Van al viaje: $\frac{5}{7}x - \frac{1}{7}x - 5$

$\frac{5}{7}x - \frac{1}{7}x - 5 = 115$

$\frac{4}{7}x = 120$

$x = \frac{840}{4} = 210$

Hay 210 alumnos matriculados.

12. $O(p) = 3(10 - p)^2 - 273 = 3p^2 - 60p + 27$

$D(p) = (15 - 8p)6 = -48p + 90$

$3p^2 - 60p + 27 = -48p + 90$

$p^2 - 4p - 21 = 0$

$$p = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2}$$

$p = 7$

$p = -3$ (solución no válida)

El punto de equilibrio se alcanza para $p = 7$.

5 Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Determinar si una desigualdad se mantiene o se altera al efectuar la misma transformación en los dos miembros.	**1.** Analiza la siguiente cadena de desigualdades, que conduce a un resultado absurdo, y señala en qué paso se ha cometido el error y en qué consiste éste. $\frac{1}{4} > \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\log\left(\frac{1}{2}\right) > 3\log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2 > 3$
B. Resolver inecuaciones lineales con una incógnita y dar la solución mediante conjuntos y por su representación gráfica.	**2.** Resuelve las siguientes inecuaciones expresando la solución en forma de conjunto y gráficamente. a) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} - x + 2 \leqslant 5$ b) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+5}{2} > \frac{x}{2} - x$
C. Resolver gráficamente inecuaciones lineales con dos incógnitas.	**3.** Resuelve gráficamente la siguiente inecuación lineal. $2x - y > 6$
D. Resolver inecuaciones polinómicas mediante factorización y representar gráficamente el conjunto de soluciones.	**4.** Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas expresando la solución en forma de conjunto. a) $(x-1)^2 - (x+2)^2 + 3x^2 \leqslant -7x + 1$ b) $x^3 + 3x^2 - x \leqslant 3$
E. Resolver inecuaciones racionales mediante factorización y representar gráficamente el conjunto de soluciones.	**5.** Resuelve la siguiente inecuación expresando la solución en forma de conjunto y gráficamente. $\frac{4 - x^2}{x^2 - 4x} \leqslant 0$
F. Resolver sistemas de dos o más inecuaciones con una incógnita y representar gráficamente el conjunto de soluciones.	**6.** Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales y expresa la solución en forma de conjunto y gráficamente. $\begin{cases} 2x - 3 \leqslant 5 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases}$
G. Resolver gráficamente sistemas de dos o más inecuaciones lineales con dos incógnitas.	**7.** Resuelve gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales y colorea la región factible. $\begin{cases} x > 1 \\ x + y - 5 < 0 \\ 2x + y < 7 \\ y + 1 > 0 \end{cases}$ **8.** Representa la región del plano limitada por los siguientes semiplanos. $\begin{cases} \lvert -x + 3y \rvert < 2 \\ \lvert 2x - y \rvert < 3 \end{cases}$
H. Plantear y resolver problemas que den lugar a inecuaciones o sistemas de inecuaciones de los estudiados en esta unidad.	**9.** Calcula todos los números que verifican que su cuadrado menos su doble es negativo.

Soluciones

1. $\frac{1}{4} > \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\log\left(\frac{1}{2}\right) > 3\log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2 > 3$

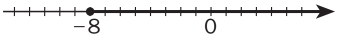
Los tres primeros pasos son correctos, ya que en el 1.º solo hemos expresado los números en forma potencial, por lo que no varía la expresión; en el 2.º tomamos logaritmos decimales que al ser una función creciente mantiene la desigualdad; y en el tercer paso aplicamos propiedades de los logaritmos para bajar los exponentes. En el cuarto dividimos los dos términos de la desigualdad por log(0,5), que es un número negativo, por lo que la desigualdad debe cambiar de sentido y así obtendríamos $2 < 3$.

2. a) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} - x + 2 \leqslant 5$

$\frac{7x + 2x + 2 - 14x}{14} \leqslant 3 \Rightarrow \frac{-5x + 2}{14} \leqslant 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5x + 2 \leqslant 42 \Rightarrow -5x \leqslant 40 \Rightarrow x \geqslant \frac{40}{-5} = -8$

Solución: $[-8, +\infty)$

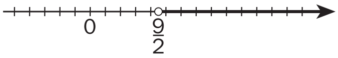


b) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+5}{2} > \frac{x}{2} - x$

$\frac{6x - 2 - 5x - 25}{10} > \frac{5x - 10x}{10} \Rightarrow \frac{x - 27}{10} > \frac{-5x}{10}$

$x - 27 > -5x \Rightarrow -27 > -6x \Rightarrow x > \frac{9}{2}$

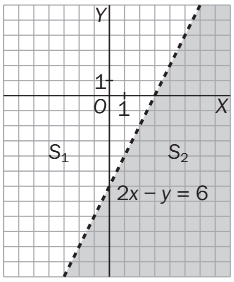
Solución: $\left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$



3. Comenzaremos por dibujar la recta $r \equiv 2x - y = 6$, para lo que bastará conocer dos puntos de la misma, $P = (0, -6)$ y $Q = (3, 0)$.

La recta anterior divide el plano en dos semiplanos S_1 y S_2. Tomamos un punto del semiplano S_1, por ejemplo el (0, 0) y comprobamos si verifica la inecuación.

$2 \cdot 0 - 0 > 6$. La solución será todo el semiplano S_2.



4. a) $(x-1)^2 - (x+2)^2 + 3x^2 \leqslant -7x + 1$

$x^2 - 2x + 1 - x^2 - 4x - 4 + 3x^2 \leqslant -7x + 1$

$3x^2 + x - 4 \leqslant 0$

$(x-1)(3x+4) \leqslant 0$

$-\infty$ $-\frac{4}{3}$ 1 $+\infty$

x − 1	−	−	+
3x + 4	−	+	+
(x − 1)(3x + 4)	+	−	+

Solución: $\left[-\frac{4}{3}, 1\right]$

b) $x^3 + 3x^2 - x \leqslant 3 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - x - 3 \leqslant 0$

$P(x) = (x+1)(x-1)(x+3) \leqslant 0$

$-\infty$ -3 -1 1 $+\infty$

x + 3	−	+	+	+
x + 1	−	−	+	+
x − 1	−	−	−	+
S	−	+	−	+

Solución: $(-\infty, -3] \cup [-1, 1]$

5. $\frac{4 - x^2}{x^2 - 4x} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{(2+x)(2-x)}{x(x-4)} \leqslant 0$

$-\infty$ -2 0 2 4 $+\infty$

x + 2	−	+	+	+	+
x	−	−	+	+	+
2 − x	+	+	+	−	−
x − 4	−	−	−	−	+
S	−	+	−	+	−

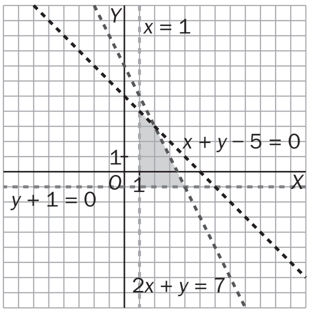
Solución: $(-\infty, -2] \cup (0, 2] \cup (4, +\infty)$

6. $\begin{cases} 2x - 3 \leqslant 5 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \leqslant 8 \\ (x-2)(x-6) < 0 \end{cases} \Rightarrow$

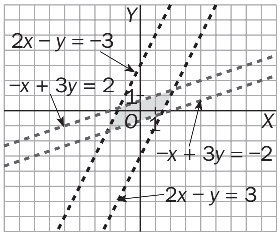
$\Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 4 \\ 2 < x < 6 \end{cases}$

Solución: $(2, 4]$

7. $\begin{cases} x > 1 \\ x + y - 5 < 0 \\ 2x + y < 7 \\ y + 1 > 0 \end{cases}$



8. $\begin{cases} -2 < -x + 3y < 2 \\ -3 < 2x - y < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 3y < 2 \\ -x + 3y > -2 \\ 2x + y < 3 \\ 2x - y > -3 \end{cases}$



9. $x^2 - 2x < 0 \Rightarrow x(x-2) < 0$

$-\infty$ 0 2 $+\infty$

x	−	+	+
x − 2	−	−	+
x(x − 2)	+	−	+

Solución: $(0, 2)$

Prueba inicial (funciones)

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Escribe las expresiones algebraicas de las siguientes funciones reales.

a) La que a cada número real le hace corresponder su triple más su cuadrado.

b) La que a cada cuadrado de lado l le hace corresponder la longitud de su diagonal.

c) La que a cada número real le hace corresponder el valor absoluto de su inverso.

2. El perímetro de un cuadrado, en función de la longitud de su lado, viene dado por la expresión algebraica $p(x) = 4x$. Indica cuál es su dominio y halla el perímetro de un cuadrado de lado 6 cm.

3. a) Encuentra la expresión algebraica de la función de proporcionalidad directa que pasa por el punto $P(1, 2)$. ¿Cuánto vale su pendiente?

b) Encuentra la expresión algebraica de la función afín que pasa por el punto $P(1, 2)$ y tiene de pendiente $m = -2$.

4. Una compañía telefónica nos cobra 1 € por establecimiento de llamada más 0,20 € por cada minuto de llamada.

a) Escribe la expresión algebraica de la función que nos da el precio de una llamada en función del tiempo que dure la misma.

b) ¿Cuánto nos costará una llamada de 10 minutos de duración?

c) Si por una llamada hemos pagado 5,60 €, ¿cuántos minutos ha durado la misma?

d) Representa gráficamente dicha función indicando su dominio.

5. a) Encuentra la expresión algebraica de la función que asigna a cada rectángulo de perímetro 10 cm su área en función de la longitud de la base. Señala el dominio de dicha función y represéntala gráficamente.

b) ¿Cuánto ha de medir la base para obtener el rectángulo de mayor área?

6. Calcula el vértice y los puntos de corte con los ejes, y representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x$

b) $g(x) = -x^2 + 5x - 4$

7. Representa gráficamente la función $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$.

8. La siguiente gráfica representa el precio de un coche, en miles de euros, en función de los años de antigüedad del mismo.

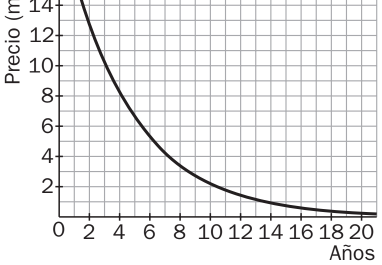
Sabiendo que la expresión algebraica de dicha función es $f(x) = k \cdot 0{,}8^x$, calcula:

a) El valor de k.

b) El precio del coche cuando era nuevo.

c) Su precio cuando tenga 10 años de antigüedad.

d) Cuántos años deben transcurrir para que su precio sea menor de 4000 €.



Soluciones

1. a) $f(x) = 3x + x^2$ b) $f(l) = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}\ l$ c) $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$

2. $p(x) = 4x$; $D(p) = (0, +\infty)$. Para $x = 6$ cm, $p(6) = 24$ cm

3. a) $f(x) = mx$; $f(1) = 2 \Rightarrow 2 = m1 \Rightarrow m = 2$. La función es $f(x) = 2x$ y su pendiente vale 2.

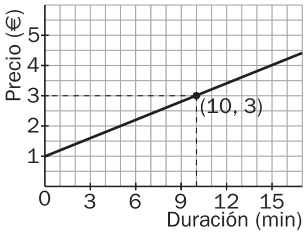
b) $g(x) = mx + n = -2x + n$; $g(1) = 2 \Rightarrow 2 = -2 + n \Rightarrow n = 4 \Rightarrow g(x) = -2x + 4$

4. a) $P(t) = 1 + 0{,}2t$ (siendo t la variable que expresa la duración, en minutos, de la llamada)

b) $P(10) = 1 + 0{,}2 \cdot 10 = 3$ €

c) $5{,}6 = 1 + 0{,}2t \Rightarrow 0{,}2t = 4{,}6 \Rightarrow t = 23$ minutos

d) La gráfica es la de la derecha. $D(P) = (0, +\infty)$

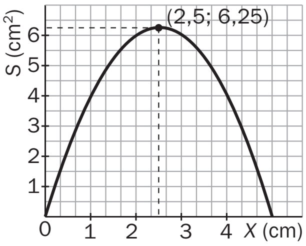


5. a) $P(x) = 2x + 2y = 10 \text{ cm} \Rightarrow y = 5 - x$

$S(x) = xy = x(5 - x) = -x^2 + 5x$

$D(S) = (0, 5)$

b) El máximo de la función área se alcanza en el vértice de la parábola, esto es, en el punto $V = (2{,}5; 6{,}25)$. Luego el rectángulo de área mayor es un cuadrado de 2,5 cm de lado.



6. a) $f(x) = 2x^2 - 4x$

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = (1, -2)$$

$$2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$$

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

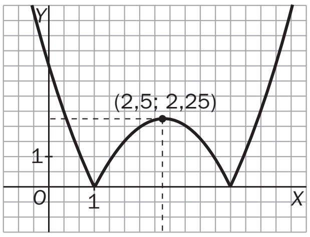
b) $g(x) = -x^2 + 5x - 4$

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

$$-x^2 + 5x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5 + \sqrt{25 - 16}}{-2} \rightarrow (1, 0) \\ x = \dfrac{-5 - \sqrt{25 - 16}}{-2} \rightarrow (4, 0) \end{cases}$$

$g(0) = -4 \rightarrow (0, -4)$

7. Representamos primero la parábola $g(x) = x^2 - 5x + 4$ y reflejamos respecto del eje X la zona en la que toma valores negativos tal y como observamos en la gráfica de la derecha.



8. a) En la gráfica de la función se observa que esta pasa por el punto (0, 20) $\Rightarrow f(0) = k \cdot 0.8^0 = 20 \Rightarrow k = 20$.

b) Como $f(0) = 20$, tenemos que el coche nuevo vale 20 000 €.

c) $f(10) = 20 \cdot 0{,}8^{10} = 2{,}148$. Al cabo de 10 años, el coche valdrá 2148 €.

d) $20 \cdot 0{,}8^x < 4 \Rightarrow 0{,}8^x < 0{,}2 \Rightarrow \log(0{,}8^x) < \log(0{,}2) \Rightarrow x \log(0{,}8) < \log(0{,}2) \xrightarrow{\log(0,8) < 0} x > \dfrac{\log(0{,}2)}{\log(0{,}8)} \approx 7{,}2$

Luego deben transcurrir más de 7 años para que el precio sea menor de 4000 €.

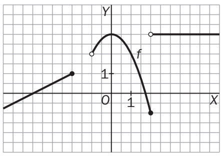
6 Funciones

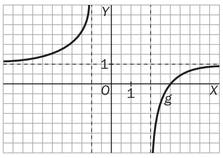
CRITERIOS DE EVALUACIÓN

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Reconocer las variables, el dominio y el recorrido de una función a la vista de su gráfica.

1. Dadas las gráficas de las siguientes funciones, indica su dominio y recorrido:

a) 

b) 

B. Calcular el dominio de una función dada por su expresión algebraica.

2. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ b) $g(x) = \sqrt{x+3}$ c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2+1}}$

C. Operar aritméticamente con funciones y calcular el dominio de la función resultante.

3. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$ y $g(x) = x^2 - 4$, realiza las operaciones indicadas y determina el dominio de las funciones que hayas obtenido.

a) $f + g$ b) $f - g$ c) $f \cdot g$ d) $\dfrac{f}{g}$

D. Encontrar la función compuesta de dos o más funciones y estudiar su dominio de definición.

4. Dadas las funciones $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = \sqrt{x+2}$ y $t(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$, calcula las siguientes funciones y halla sus dominios de definición.

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $g \circ t$ d) $h \circ f$

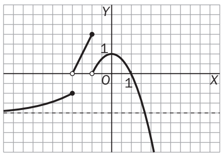
E. Calcular en casos sencillos la expresión algebraica y la representación gráfica de la función inversa de una dada.

5. Dada la función $f(x) = \dfrac{5}{x-4}$:

a) Calcula su función inversa.
b) Calcula el dominio de f y de su inversa y represéntalas gráficamente.

F. Analizar las propiedades globales más importantes de una función a partir de su gráfica: continuidad, crecimiento, extremos relativos y tendencia.

6. La función f está representada a continuación:



a) Estudia la continuidad de f.
b) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
c) Halla las coordenadas de los máximos y mínimos relativos de f.
d) Estudia el comportamiento de f en $+\infty$ y $-\infty$.

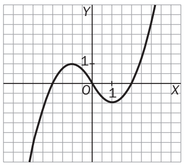
G. Representar gráficamente funciones definidas a trozos.

7. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \leqslant -2 \\ \dfrac{1}{2}x & \text{si } -2 < x \leqslant 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ b) $g(x) = |x^2 - 2x - 4|$

H. Construir gráficas de funciones mediante traslaciones o dilataciones de una dada.

8. En la figura aparece la gráfica de la función f. A partir de ella, dibuja la gráfica de la función $g(x) = 3 + f(x + 2)$.



Soluciones

1. a) $D(f) = (-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)$

$R(f) = (-\infty, 3]$

b) $D(g) = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

$R(g) = \mathbf{R} - \{1\}$

2. a) $D(f) = \{x \in \mathbf{R} \ / \ x + 3 \neq 0\} =$

$= \mathbf{R} - \{-3\}$

b) $D(g) = \{x \in \mathbf{R} \ / \ x + 3 \geqslant 0\} =$

$= [-3, +\infty)$

c) $D(h) = \{x \in \mathbf{R} \ / \ \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} \geqslant 0\}$

Como $x^2 + 1 > 0$ para cualquier valor real, sigue que:

$D(h) = \{x \in \mathbf{R} \ / \ x^2 - 4 \geqslant 0\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

3. a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2} + x^2 - 4 =$

$= \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 7}{x + 2}$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2} - x^2 + 4 =$

$= \frac{-x^3 - x^2 + 4x + 9}{x + 2}$

c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2} \cdot (x^2 - 4) =$

$= (x^2 + 1) \cdot (x - 2)$

Como $D(f) = \mathbf{R} - \{-2\}$ y $D(g) = \mathbf{R}$, los dominios de las tres funciones de los apartados anteriores serán $\mathbf{R} - \{-2\}$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^2 + 1}{x + 2}}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$

Como $g(x) = 0$ si $x = 2$ o $x = -2$, $D\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

4. a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 + 3 = x^2 + 4$

Como $D(f) = \mathbf{R}$ y $D(g) = \mathbf{R}$, $D(f \circ g) = \mathbf{R}$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x + 3) = (x + 3)^2 + 1 =$

$= x^2 + 6x + 10$

Como $D(g) = \mathbf{R}$ y $D(f) = \mathbf{R}$, $D(g \circ f) = \mathbf{R}$

c) $(g \circ t)(x) = g[t(x)] = g\left(\frac{x + 1}{x + 2}\right) = \left(\frac{x + 1}{x + 2}\right)^2 + 1 =$

$= \frac{2x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x + 4}$

Como $D(g) = \mathbf{R}$, la única restricción que hay es donde no está definida t; por tanto, $D(g \circ t) = \mathbf{R} - \{-2\}$

d) $(h \circ f)(x) = h[f(x)] = h(x + 3) =$

$= \sqrt{(x + 3) + 2} = \sqrt{x + 5}$

Como $D(h) = [-2, +\infty)$, se debe ver cuándo ocurre que $x + 3 \geqslant -2$, y esto es cuando $x \geqslant -5$; por tanto, $D(h \circ f) = [-5, +\infty)$.

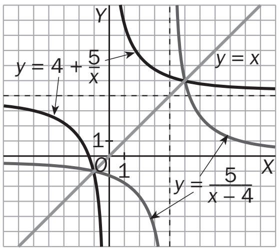
5. a) $y = \frac{5}{x - 4} \Rightarrow x = \frac{5}{y - 4} \Rightarrow xy - 4x = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = 4x + 5 \Rightarrow y = \frac{4x + 5}{x} = 4 + \frac{5}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 4 + \frac{5}{x}$

b) $D(f) = \mathbf{R} - \{4\}$

$D(f^{-1}) = \mathbf{R} - \{0\}$



6. a) f es continua en $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$.

b) f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0)$.

f es decreciente en $(0, +\infty)$.

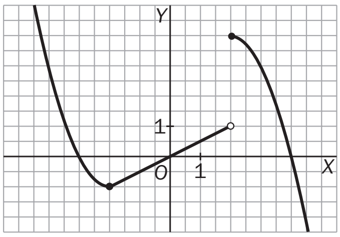
c) $(-1, 2)$ y $(0, 1)$ son máximos relativos.

f no tiene mínimos relativos.

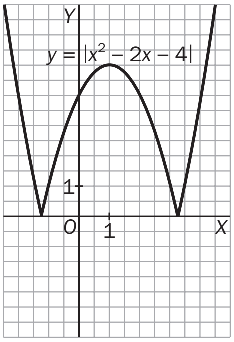
d) f tiende a -3 cuando x tiende a $-\infty$.

f tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

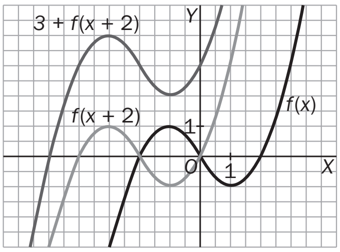
7. a)



b)



8.



7 Interpolación

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Representar tablas de valores y reconocer los intervalos en los que resulta adecuado el ajuste a una recta.

1. Se ha medido la velocidad de un vehículo durante un desplazamiento. La siguiente tabla recoge la velocidad del vehículo en función del tiempo.

Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5
Velocidad (km/h)	0	30	60	50	30	0

a) Representa los datos gráficamente y une los puntos obtenidos mediante segmentos.
b) Estima gráficamente la velocidad del vehículo al cabo de la hora y media.
c) Señala en qué momentos del desplazamiento el vehículo llevaba una velocidad de 15 km/h.

2. La siguiente tabla representa los beneficios, en miles de euros, de una empresa de transporte desde que comenzó a funcionar en 1980.

Año	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Beneficio (€)	50	60	70	95	100	105

Representa los datos y determina el máximo intervalo para el que la gráfica se aproxima a una recta.

B. Utilizar la interpolación y la extrapolación lineal para calcular valores de una función dada mediante una tabla de valores.

3. Sabiendo que log 2 = 0,3010 y log 3 = 0,4771, calcula por interpolación lineal el valor de log(2,5) y log(2,7).

Compara los resultados obtenidos con los que te proporciona la calculadora y acota el error cometido.

4. El número de hipotecas concedidas en una sucursal de una caja de ahorros en el año 2000 fue de 130, y en el año 2005 fue de 210. Determina el número de hipotecas que se concedieron en 2006.

C. Obtener la ecuación de la función de segundo grado más sencilla que pasa por tres puntos determinados.

5. Determina la parábola que pasa por los puntos $P(1, -2)$, $Q(3, 0)$ y $R(7, 52)$.

D. Determinar la idoneidad de la interpolación lineal o cuadrática.

6. Dala la tabla de la función $f(x)$:

x	1	2	3	4
y	3	−5	6	−2

a) Halla el valor que correspondería a 4 mediante la función de interpolación cuadrática obtenida utilizando los otros tres valores de la tabla.
b) Calcula el error cometido y, a la vista del mismo, concluye si te parece acertado o no utilizar la función de interpolación hallada.

E. Utilizar la interpolación cuadrática para calcular valores de una función.

7. De una función conocemos la siguiente tabla de valores.

x	1	3	7
y	2	0	20

Halla la función de interpolación cuadrática correspondiente a dicha tabla de valores. Determina su valor para $x = 5$.

F. Aplicar la interpolación y extrapolación a la resolución de problemas en diversos contextos.

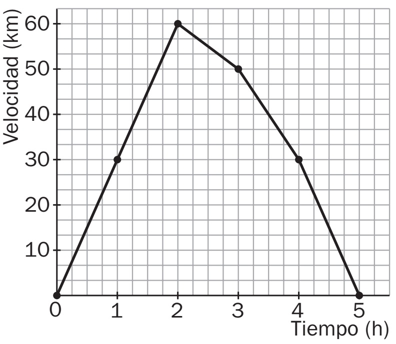
8. Los beneficios o pérdidas, en millones de euros, para una empresa en los tres primeros meses de un año han sido los que se dan en la tabla adjunta.

Meses	**Enero**	**Febrero**	**Marzo**
Beneficio	−0,5	0,6	1,3

a) Halla el polinomio interpolador de 2.º grado que mejor se ajusta a los datos.
b) Utiliza dicho polinomio para prever los posibles beneficios en mayo y en julio.

Soluciones

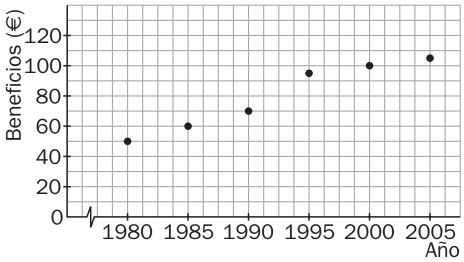
1. a)



b) 45 km/h

c) A la media hora y a las cuatro horas y media

2.



Existen dos intervalos de igual longitud que pueden aproximarse mediante una recta: [1980, 1990] y [1995, 2005].

3. Se aproxima la función logaritmo por la función lineal $f(x) = ax + b$.

$$\begin{cases} 0{,}3010 = 2a + b \\ 0{,}4771 = 3a + b \end{cases} \Rightarrow a = 0{,}1716;\ b = -0{,}0512$$

$f(2{,}5) = 0{,}1761 \cdot 2{,}5 - 0{,}0512 = 0{,}38905$

$f(2{,}7) = 0{,}1761 \cdot 2{,}7 - 0{,}0512 = 0{,}42427$

	Aproximación	Calculadora
log(2,5)	0,38905	0,39794
log(2,7)	0,42427	0,43136

En ambos casos, el error que se comete es menor que una centésima.

4. Se calcula la recta que pasa por los puntos $A(2000, 130)$ y $B(2005, 210)$.

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 130 = 2000a + b \\ 210 = 2005a + b \end{cases} \Rightarrow a = 16;\ b = -31\,870$$

Para $x = 2006$ se obtiene $y = 2006 \cdot 16 - 31\,870 = 226$.

En 2006, la sucursal concedió 226 hipotecas.

5. Sea la parábola $y = ax^2 + bx + c$, que pasa por P, Q y R.

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 49a + 7b + c = 52 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$.

La parábola buscada es $y = 2x^2 - 7x + 3$.

6. a) Sea la parábola $y = ax^2 + bx + c$, que pasa por los puntos $A(1, 3)$, $B(2, -5)$ y $C(3, 6)$.

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = -5 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = \frac{19}{2}$, $b = -\frac{73}{2}$, $c = 30$.

La parábola buscada es $y = \frac{19}{2}x^2 - \frac{73}{2}x + 30$.

Para $x = 4$ se obtiene $y = \frac{19}{2} \cdot 16 - \frac{73}{2} \cdot 4 + 30 = 36$.

b) El error cometido es de 38, por lo que no parece adecuado utilizar la interpolación cuadrática.

7. Sea la parábola $y = ax^2 + bx + c$, que pasa por los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 0)$ y $C(7, 20)$.

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 49a + 7b + c = 20 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.

La parábola buscada es $y = x^2 - 5x + 6$.

Para $x = 5$ se obtiene $y = 25 - 5 \cdot 5 + 6 = 6$.

8. a) Asignamos a enero el valor 1; a febrero, 2, y a marzo, 3; con lo cual tendremos que calcular la función cuadrática que pasa por los puntos $A(1; -0{,}5)$, $B(2; 0{,}6)$ y $C(3; 1{,}3)$.

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = -0{,}5 \\ 4a + 2b + c = 0{,}6 \\ 9a + 3b + c = 1{,}3 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = -0{,}2$; $b = 1{,}7$; $c = -2$.

La parábola buscada es $y = -0{,}2x^2 + 1{,}7x - 2$.

b) Mayo corresponde al mes 5, y julio, al mes 7.

Para $x = 5$, $y = -0{,}2 \cdot 25 + 1{,}7 \cdot 5 - 2 = 1{,}5$

Para $x = 7$, $y = -0{,}2 \cdot 49 + 1{,}7 \cdot 7 - 2 = 0{,}1$

Los beneficios de mayo serán de 1,5 millones, y los de julio, de 0,1 millones.

8 Límites y continuidad

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

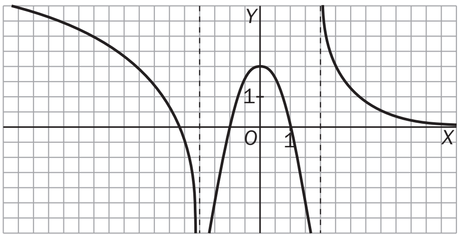
ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Analizar la tendencia de una función a la vista de una tabla de valores o una gráfica.

1. La gráfica describe el comportamiento de una función $f(x)$. Halla el límite de f en los siguientes casos.

a) $x \to +\infty$ c) $x \to -2$ e) $x \to 2^-$ g) $x \to 1$

b) $x \to -\infty$ d) $x \to 2^+$ f) $x \to 0$ h) $x \to -1$



B. Resolver, por métodos algebraicos, indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.

2. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 - 7x^2 + 12}{6x^3 + 3x^2 - 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2 + 4x}{x^2 + x}}$

C. Interpretar gráficamente los resultados obtenidos en el cálculo de límites de funciones.

3. Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ que verifique, simultáneamente, las siguientes condiciones.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$ $f(-4) = 0$ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ $f(0) = 2$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$

D. Hallar las asíntotas de una función a través del cálculo de límites.

4. Señala si las siguientes funciones tienen asíntotas verticales, horizontales u oblicuas, y determina sus expresiones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$

E. Determinar los intervalos de continuidad de una función dada por su expresión algebraica.

5. Halla el valor de k, sabiendo que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 4} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$.

F. Determinar, y analizar de qué tipo son, las discontinuidades de una función dada por su expresión algebraica o por su gráfica.

6. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + x - 6}$ b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 5 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

7. Calcula el valor de a para el cual la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$.

Soluciones

1. a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

g) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

h) $\lim_{x \to -1} f(x) = 0$

2. a) Como tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 2$, el límite es de la forma $\frac{0}{0}$. Para resolverlo, se factorizan ambos polinomios y se simplifica.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x + 2)(x - 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{x + 2} = -\frac{1}{4}$$

b) De nuevo es de la forma $\frac{0}{0}$, ya que el numerador y el denominador se anulan en $x = 0$. La indeterminación desaparece si se multiplican ambos términos por la expresión conjugada del denominador.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 + \sqrt{1 - x}\right)}{\left(1 - \sqrt{1 - x}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - x}\right)} =$$

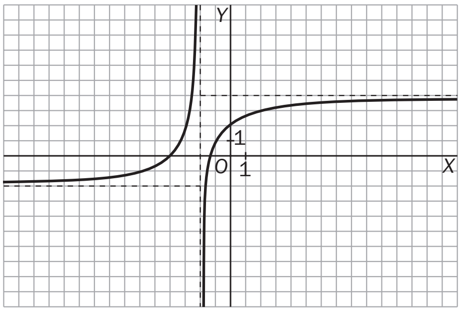
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 + \sqrt{1 - x}\right)}{x} = 2$$

c) Este límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Para resolverlo se dividen los polinomios del numerador y denominador por x^3 y se simplifican los términos.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 12}{6x^3 + 3x^2 - 2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{5 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^3}}{6 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}} = \frac{5}{6}$$

3. Hay infinitas funciones con estas características, una de las posibles es:



4. a) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = 1$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{12}{0^-} = -\infty$$

A la vista de los resultados anteriores, la función presenta una asíntota horizontal en $y = 1$ y una asíntota vertical en $x = -2$. En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable.

b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} = -\infty \Rightarrow$ Asíntota vertical: $x = -1$

Si se efectúa la división indicada en la expresión de la función se obtiene:

$g(x) = x + 2 - \frac{1}{x + 1}$. Como $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + 1} = 0$, se deduce que la recta $y = x + 2$ es la asíntota oblicua.

5. Para que f sea continua en $x = 2$, el límite en el punto tiene que coincidir con el valor de la función en él.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

Solución: $f(2) = k = 4$

6. a) Al ser $f(x)$ una función racional, será continua en todos los puntos menos en los que anulan el denominador $\{2, -3\}$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

Por tanto, en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable, y en $x = -3$, una discontinuidad asintótica.

b) Se trata de una función definida a trozos. Las funciones parciales son continuas en sus dominios, pues se trata de funciones polinómicas. Hay que estudiar la continuidad en los puntos de unión.

Para $x = 0$, $\lim_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1 \neq \lim_{x \to 0^+} (2x - 1) = -1$

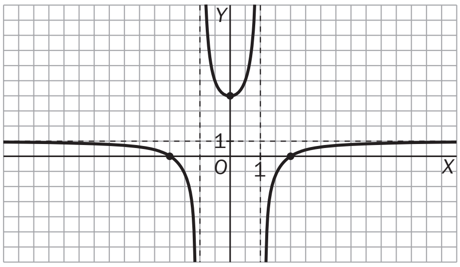
La función es discontinua en $x = 0$. Presenta una discontinuidad de salto finito (2 unidades), ya que los límites laterales no coinciden.

Para $x = 3$, $\lim_{x \to 3^-} (2x - 1) = 5 = \lim_{x \to 3^+} 5 = f(3)$

La función es continua en $x = 3$.

7. Para que presente una discontinuidad evitable se necesita que $x = 1$ sea una raíz tanto del numerador como del denominador (que sí lo es). Por tanto, aplicando el teorema del resto: $1^2 + 1 + a = 0 \Rightarrow a = -2$.

9 Funciones elementales

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Estudiar el signo, las simetrías y la periodicidad de una función dada por su expresión algebraica o por su gráfica.	**1.** A la vista de la gráfica de la función *f*, establece: a) Los puntos de corte con los ejes y el signo de la función. b) Si se trata de una función simétrica, y señala en su caso el eje o centro de simetría. 
B. Esbozar la gráfica de una función polinómica fácilmente factorizable.	**2.** Esboza la gráfica de la función polinómica $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$.
C. Representar y estudiar funciones racionales sencillas.	**3.** Realiza un estudio completo y dibuja la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3x}$
D. Obtener la gráfica de funciones exponenciales y logarítmicas y conocer las relaciones entre las mismas.	**4.** Dibuja sobre los mismos ejes las gráficas de las funciones $f(x) = 4^x$ y $g(x) = \log_4 x - 1$ y explica qué relación hay entre dichas gráficas.
E. Representar gráficas de funciones trigonométricas sencillas.	**5.** A partir de la gráfica de cos *x*, dibuja la gráfica de la función $f(x) = 1 + 3\cos(2x)$.
F. Representar funciones relacionadas con la función parte entera.	**6.** Ayudándote de una tabla de valores, representa la función $f(x) = x + [x]$.
G. Representar gráficamente el valor absoluto de una función.	**7.** Representa la función: $f(x) = \begin{cases} \lvert x^2 - 1 \rvert & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1, 1] \end{cases}$
H. Resolver problemas en los que las relaciones de dependencia entre magnitudes vengan dadas por las funciones estudiadas en esta unidad.	**8.** El número de bacterias, en miles, de cierto cultivo evoluciona en el tiempo según la función $N(t) = 5 + 3^{\frac{t-1}{2}}$, en donde t se mide en horas. a) ¿Cuántos miles de bacterias habrá al cabo de 6 horas? b) Calcula a partir de qué instante el número de bacterias superará las 23 000.

Soluciones

1. a) Puntos de corte con los ejes: (−2, 0), (0, 4) y (2, 0).

Para estudiar el signo de la función consideramos los intervalos (−∞, −2), (−2, −1), (−1, 1), (1, 2) y (2, +∞).

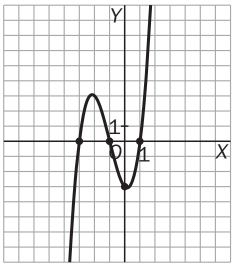
b) Se observa que es una función simétrica respecto del eje de ordenadas. La función es par, ya que:

$$f(-x) = f(x)$$

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f(0) = -3$

La función corta el eje horizontal en los puntos (−3, 0), (−1, 0) y (1, 0), y el eje vertical en (0, −3). Con los datos anteriores podemos esbozar la gráfica, aunque si obtenemos algún otro valor, podremos dibujar esta con mayor precisión.



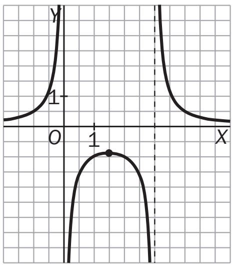
3. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3x} = \dfrac{2}{x(x - 3)}$

Vemos que la función no está definida ni en $x = 0$ ni en $x = 3$, en donde presenta asíntotas verticales.

Asimismo tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

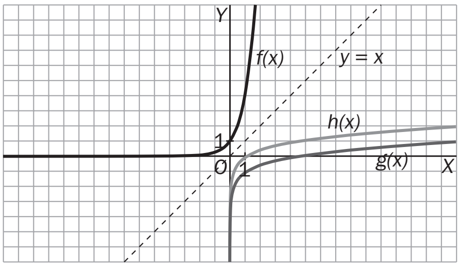
Podemos calcular algún otro punto de la función como $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-8}{9}\right)$.

Con esta información esbozamos la gráfica.

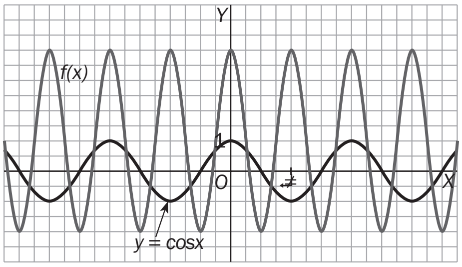


4. A partir de la gráfica de $f(x) = 4^x$ dibujamos la función $h(x) = \log_4 x$, ya que ambas son simétricas respecto de la recta $y = x$ por ser funciones inversas.

Para dibujar $g(x) = \log_4 x - 1$ sometemos la función $h(x)$ a una traslación de vector (0, −1).

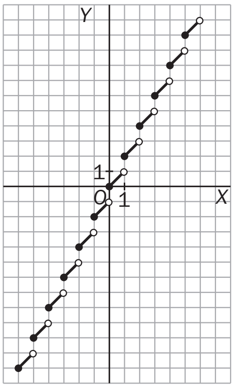


5. Al multiplicar por 3 aumentamos en tres veces la amplitud; al sumar 1 desplazamos verticalmente la gráfica una unidad hacia arriba; al multiplicar el argumento por 2, reducimos el período a la mitad, con lo que resulta la gráfica dibujada.

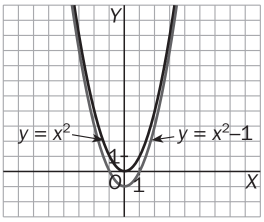


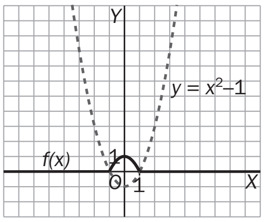
6. En la tabla se dan algunos valores. Se obtiene la gráfica adjunta.

X	[x]	f(x)
−2	−2	−4
−1,5	−2	−3,5
−1	−1	−2
−0,3	−1	−1,3
0	0	0
0,3	0	0,3
0,7	0	0,7
1	1	2
1,4	1	2,4
1,9	1	2,9
2	2	4



7.





8. a) $N(6) = 5 + 3^{\frac{5}{2}} = 20{,}588$

$\Rightarrow$ 20 588 bacterias.

b) $5 + 3^{\frac{t-1}{2}} > 23 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{\frac{t-1}{2}} > 18 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{t - 1}{2} \log 3 > \log 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow t > \dfrac{2 \log 18}{\log 3} + 1 = 6{,}26 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Para $t > 6{,}26$ horas

10 Derivadas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo y la tasa de variación instantánea de una función en un punto.

1. Tras realizar un viaje de estudios, los alumnos redactan un informe en el que aparece la siguiente tabla.

	Salida				Llegada destino
Hora	9.00	9.30	10.15	11.30	12.00
Distancia al instituto	0 km	50 km	170 km	290 km	320 km

¿Cuál fue la velocidad media en el viaje?

¿Qué velocidad media llevaron en el intervalo [9.30, 10.15]? ¿Y en el intervalo [9.30, 11.30]?

¿Qué velocidad media llevaron en la primera media hora del viaje? ¿Y en la última media hora?

B. Calcular la derivada de una función en un punto aplicando la definición y conocer y aplicar su interpretación geométrica.

2. a) Dada la función $f(x) = x^2 - 5$, calcula, utilizando la definición, la derivada de dicha función en los puntos de abscisa $x = -2$ y $x = 2$.

b) Calcula la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa $x = 2$.

3. ¿En qué puntos la tangente a la curva $y = 6x^3 + 9x^2 - 2$ es paralela al eje X?

4. Calcula los puntos en los que la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 5$$

tiene tangente paralela a la recta de ecuación $y = 2x - 6$.

C. Calcular la función derivada de funciones elementales o de funciones obtenidas mediante operaciones algebraicas con funciones elementales.

5. Calcula la función derivada de las siguientes funciones.

a) $y = (x^2 - 5)^6$

b) $y = \sqrt[5]{3x^2}$

c) $y = (1 - 5x)^3$

d) $y = (x^2 + 4)(3x^3 + 1)$

e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

f) $y = \dfrac{x^3 - x + 3}{x^2 - 4}$

D. Calcular las derivadas sucesivas de funciones elementales.

6. Calcula las derivadas 1.ª, 2.ª y 3.ª de la función $y = \text{sen } x$. A partir de los resultados obtenidos, averigua cuál será la derivada 8.ª de dicha función.

E. Calcular la función derivada de una función obtenida mediante la composición de dos o más funciones elementales.

7. Calcula la función derivada de las siguientes funciones.

a) $y = \left(\ln(2^x + x)\right)^3$

b) $y = \text{sen}\left(\sqrt{2x^3 - 3x}\right)$

F. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función y los máximos y mínimos absolutos y relativos.

8. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 3$.

9. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ en el intervalo $[-2, 3]$.

G. Aplicar las derivadas en la resolución de problemas de optimización.

10. El beneficio neto mensual, en miles de euros, de una empresa que fabrica camiones viene dado por la función $B(x) = 12x - x^3$, donde x es el número de camiones fabricados en un mes.

a) Calcula la producción mensual que hace máximo el beneficio.

b) Calcula el beneficio máximo correspondiente a dicha producción.

Soluciones

1. Si se denomina $e(t)$ a la distancia recorrida:

$$v_{[9,\ 12]} = \frac{e(12) - e(9)}{3} = \frac{320 - 0}{3} = 106,\widehat{6} \text{ km/h}$$

$$v_{[9.30,\ 10.15]} = \frac{e(10.15 \text{ h}) - e(9.30 \text{ h})}{0,75} = \frac{120}{0,75} = 160 \text{ km/h}$$

$$v_{[9.30,\ 11.30]} = \frac{e(11.30 \text{ h}) - e(9.30 \text{ h})}{2} = \frac{240}{2} = 120 \text{ km/h}$$

$$v_{[9,\ 9.30]} = \frac{50}{0,5} = 100 \text{ km/h};\quad v_{[11.30,\ 12]} = \frac{30}{0,5} = 60 \text{ km/h}$$

2. a) $f'(2) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 5 - (-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = 4$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-2+h)^2 - 5 - (-1)}{h} = \frac{h^2 - 4h}{h} = 4$$

b) $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$;

$y + 1 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 9$

3. $y' = 18x^2 + 18x$;

$$y' = 0 \Rightarrow 18x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

En $x = 0$, la ecuación de la tangente es $y = -4$.

En $x = -1$, la ecuación de la tangente es $y = -1$.

4. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 5$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 7$

$f'(x) = 2 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 7 = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{6} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $[-3, f(-3)]$ es:

$$y - 26 = 2(x + 3) \rightarrow y = 2x + 32$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $[1, f(1)]$ es:

$$y - 2 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x$$

5. a) $y' = 6(x^2 - 5)^5 \cdot 2x = 12x(x^2 - 5)^5$

b) $y' = (3x^2)^{\frac{1}{5}}$

$$y' = \frac{1}{5}(3x^2)^{\frac{-4}{5}}(6x) = \frac{6x}{5\sqrt[5]{81x^8}} = \frac{6}{5\sqrt[5]{81x^3}}$$

c) $y' = 3(1 - 5x)^2(-5) = -15(1 - 5x)^2$

d) $y' = 2x(3x^3 + 1) + (x^2 + 4)9x^2 = 15x^4 + 36x^2 + 2x$

e) $y' = \dfrac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{x^4 + 2x^2 + 1} = \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

f) $y' = \dfrac{(3x^2 - 1)(x^2 - 4) - 2x(x^3 - x + 3)}{(x^2 - 4)^2} =$

$$= \frac{x^4 - 11x^2 - 6x + 4}{(x^2 - 4)^2}$$

6. $y' = \cos x \qquad y'' = -\text{sen } x$

$y''' = -\cos x \qquad y'''' = \text{sen } x$

En la 4.ª derivada vuelve a aparecer la función sen x con signo positivo 4, con lo cual, si continuamos derivando, volverán a repetirse las expresiones $\cos x$, $-\text{sen } x$, $-\cos x$, sen x.

Por tanto, podemos concluir que la derivada octava de la función $y = \text{sen}\, x$ será ella misma.

7. a) $y' = 3\big(\ln(2^x + x)\big)^2\big(\ln(2^x + x)\big)' =$

$$= 3\big(\ln(2^x + x)\big)^2 \cdot \frac{(2^x + x)'}{2^x + x} =$$

$$= 3\big(\ln(2^x + x)\big)^2 \cdot \frac{2^x \ln 2 + 1}{2^x + x}$$

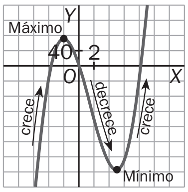
b) $y' = \cos\big(\sqrt{2x^3 - 3x}\big) \cdot \dfrac{6x^2 - 3}{2\sqrt{2x^3 - 3x}}$

8. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 60x + 3$; $f'(x) = 6x^2 - 18x - 60$

$f'(x) > 0 \Rightarrow 6(x - 5)(x + 2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$.

Por tanto, concluimos que la función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 5)$. En el punto -2 presenta un máximo relativo, y en el punto 5, un mínimo relativo.



9. Los posibles máximos y mínimos relativos estarán en los puntos de derivada nula:

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x + 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \{-1, 0, 2\}$

Aplicando el criterio de la segunda derivada:

$f''(x) = 36x^2 - 24x - 24$

$f''(-1) = 36 > 0$; $f''(0) = -24 < 0$; $f''(2) = 72 > 0$.

Por tanto, en $x = -1$ y $x = 2$ hay mínimos relativos, y en $x = 0$, un máximo relativo.

Para determinar los extremos absolutos, se halla el valor de la función en los extremos del intervalo y en las abscisas de los extremos relativos:

$f(-2) = 33$, $f(-1) = -4$, $f(0) = 1$, $f(2) = -31$, $f(3) = 28$

Por tanto, el máximo absoluto corresponde al punto $(-2, 33)$, y el mínimo absoluto, a $(2, -31)$.

10. a) Calculamos la derivada:

$B(x) = 12x - x^3$

$B'(x) = 12 - 3x^2$; $B'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

La función $B(x)$ no está definida para los números negativos, ya que el número de camiones fabricados debe ser mayor o igual que cero.

Para comprobar qué tipo de punto corresponde a $x = 2$ calculamos el signo de la segunda derivada:

$B''(x) = -6x$, $\qquad B''(2) = -12$

Por tanto, en $x = 2$ la función beneficio presenta un máximo relativo.

b) $B(2) = 24 - 8 = 16$; el beneficio máximo será, por tanto, de 16 000 €.

Prueba inicial (estadística y probabilidad)

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Las notas finales de Matemáticas de los alumnos de un grupo de 4.º de ESO han sido:

6, 7, 5, 5, 2, 4, 9, 7, 8, 3, 5, 7, 6, 8, 5, 9, 7, 3, 8, 4, 10, 7, 6, 4, 5, 6, 7, 10, 9, 8

a) Ordena dichos datos y represéntalos gráficamente utilizando un diagrama de barras y un polígono de frecuencias.

b) Calcula la moda, la mediana y la media.

c) Calcula la varianza, s^2, y la desviación típica, s.

d) ¿Qué porcentaje de alumnos aprueban?

e) ¿Qué porcentaje de alumnos tienen una nota perteneciente al intervalo $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$? ¿Y al intervalo $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$?

2. El número de espectadores de cierta sala de cine durante los 25 primeros días del mes de diciembre ha sido el siguiente:

152, 156, 153, 152, 157, 156, 147, 150, 145, 144, 144, 150, 143,
142, 145, 140, 138, 135, 130, 128, 128, 120, 112, 110, 110

a) Ordena los datos anteriores en una tabla agrupándolos en intervalos de clase. Representa dichos datos mediante un histograma y un polígono de frecuencias.

b) Calcula el intervalo modal y el intervalo mediano.

c) Calcula la media y la desviación típica de esta distribución.

3. La nota media de un alumno en Matemáticas, teniendo en cuenta las notas de los primeros cinco exámenes, es 6,6. ¿Qué nota ha obtenido en el sexto examen si con él la nota media ha subido hasta 7?

4. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados al aire:

a) Se obtenga un seis doble.

b) Salga el mismo resultado en las dos caras.

c) Salga resultado distinto en cada cara.

d) La suma de los puntos de las dos caras sea 10.

5. Una bolsa contiene cuatro bolas negras y tres amarillas. Sacamos dos bolas al azar.

a) Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean negras si la extracción se ha realizado devolviendo la primera bola a la bolsa antes de sacar la segunda.

b) Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean amarillas si la extracción se ha realizado sacando una bola detrás de la otra, pero sin haber devuelto la primera a la bolsa.

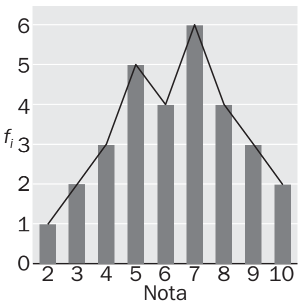
c) Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color si la extracción de la segunda se hace sin haber devuelto la primera a la bolsa.

6. Se tienen dos bolsas: la primera contiene cuatro bolas blancas y tres negras, y la segunda, tres blancas y dos negras. Se lanza un dado al aire: si sale un número mayor o igual que 5, se saca una bola de la primera bolsa, pero si sale un número menor que 5, se extrae de la segunda bolsa. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.

Soluciones

1. a) La tabla de frecuencias y los gráficos son los de la derecha.

x_i	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
2	1	1	2	4
3	2	3	6	18
4	3	6	12	48
5	5	11	25	125
6	4	15	24	144
7	6	21	42	294
8	4	25	32	256
9	3	28	27	243
10	2	30	20	200
	30		190	1332



b) Moda = 7; Mediana = 6,5

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{190}{30} \approx 6,333$$

c) $$s^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1332}{30} - 6,\widehat{3}^2 = 4,\widehat{28}$$

$$s = \sqrt{s^2} \approx 2,071$$

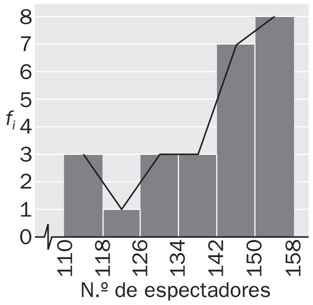
d) Aprueban 24 alumnos de los 30, lo que representa $\frac{24}{30} = 0,8 \Rightarrow 80\%$

e) $(\bar{x} - s, \bar{x} + s) = (6,333 - 2,071; 6,333 + 2,071) = (4,262; 8,404)$; en este intervalo hay 19 alumnos, lo que representa $\frac{19}{30} = 0,6\widehat{3} \Rightarrow 63,\widehat{3}\%$

$(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (6,333 - 4,142, 6,333 + 4,142) = (2,181; 10,475)$; en este intervalo hay 29 alumnos, lo que representa $\frac{29}{30} = 0,9\widehat{6} \Rightarrow 96,\widehat{6}\%$

2. a) El valor mínimo es 110, y el máximo, 157, por lo que el rango de la distribución es 47. Vamos a agrupar los datos en 6 intervalos de clase de amplitud 8, según la tabla siguiente:

Intervalos de clase	Marcas de clase x_i	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
[110, 118)	114	3	3	342	38 988
[118, 126)	122	1	4	122	14 884
[126, 134)	130	3	7	390	50 700
[134, 142)	138	3	10	414	57 132
[142, 150)	146	7	17	1022	149 212
[150, 158)	154	8	25	1232	189 728
		25		3522	500 644



b) Intervalo modal: [150, 158)

Intervalo mediano: [142, 150)

c) $$\bar{x} = \frac{3522}{25} = 140,88$$

$$s = \sqrt{\frac{500\,644}{25} - 140,88^2} = 13,36$$

3. La suma de las calificaciones de los 5 primeros exámenes es de $6,6 \cdot 5 = 33$. Por tanto, si en el último examen ha obtenido de nota x, la media final será: $7 = \frac{33 + x}{6} \Rightarrow 42 = 33 + x \Rightarrow x = 9$

4. a) $P(6, 6) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{1}{36}$

b) $P(a, a) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) $P(a, \bar{a}) = 1 - P(a, a) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

d) $P(S = 10) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

5. a) $P(N \cap N) = P(N) \cdot P(N) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

b) $P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A / A) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$

c) $P(\text{Distinto color}) = P((N \cap N) \cup (A \cap A)) = P(N \cap N) + P(A \cap A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$

6. $P(B) = P(\geqslant 5) \cdot P(B / \geqslant 5) + P(< 5) \cdot P(B / < 5) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{21} + \frac{2}{5} = \frac{62}{105}$

11 Análisis estadístico de una variable

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Clasificar y definir variables estadísticas de los distintos tipos: cualitativas, cuantitativas discretas y continuas.

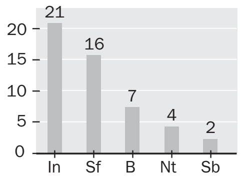
1. Para hacer un estudio sobre las características de los alumnos matriculados en 1.º de Bachillerato se consideran, entre otras, las siguientes variables estadísticas: sexo, talla, peso, color del pelo, grupo sanguíneo, pulsaciones en reposo, n.º de hermanos. Clasifica las variables anteriores según sean cualitativas o cuantitativas, y estas últimas según sean discretas o continuas.

B. Elaborar tablas de frecuencias de un conjunto de datos agrupados o no agrupados.

2. En una consulta realizada a 30 familias sobre el n.º de televisores que tienen en su casa, se han obtenido los siguientes datos:
1 2 2 3 2 1 2 2 2 4 3 1 2 3 2 3 2 4 1 0 2 1 2 2 1 2 3 1 2 2
Construye una tabla de frecuencias de la distribución X = "n.º de televisores".

C. Elaborar e interpretar gráficos estadísticos, correspondientes a distribuciones cualitativas o cuantitativas, discretas o continuas.

3. En el gráfico adjunto se observa la distribución de calificaciones, (IN, SF, B, NT, SB), con su correspondiente valoración numérica, correspondientes a las notas en matemáticas de los 50 alumnos de 1.º de Bachillerato de un determinado instituto. Construye una tabla de frecuencias correspondiente a los datos reflejados en el gráfico y representa los datos mediante un diagrama de sectores.



D. Calcular la media, moda y mediana de una serie de datos correspondientes a una variable estadística unidimensional.

4. 1º. Se probó una muestra de 70 baterías para ver su duración. Los resultados fueron los siguientes.

Horas	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100)
N.º	2	4	8	9	12	13	8	7	6	1

a) Representa los datos anteriores mediante un histograma.
b) Calcula la moda, la media y la mediana.

5. La nota media de los aprobados en un examen de Matemáticas ha sido 6,8 y la de los suspensos 3,5. Calcula la nota media de la clase completa sabiendo que hubo 35 aprobados y 15 suspensos.

6. La estatura media de los 38 alumnos de una clase es de 168 cm. Las chicas, que son 17, miden 162 cm. de media. Calcula la estatura media de los chicos.

E. Calcular la desviación media, el rango, la varianza y la desviación típica de una serie de datos correspondientes a una variable estadística unidimensional.

7. La tabla adjunta muestra las faltas de asistencia de un grupo de 28 alumnos durante un mes.

N.º de faltas	0	1	2	3	4	6	8	15	21
Alumnos	10	6	3	2	2	2	1	1	1

a) Calcula el rango y la desviación media.
b) Calcula la varianza y la desviación típica.

F. Determinar la mediana, cuartiles y percentiles de una distribución estadística.

8. La siguiente tabla muestra la distancia en kilómetros que recorren 50 personas para desplazarse a su lugar de vacaciones.

Km	[0, 100)	[100, 200)	[200, 300)	[300, 400)	[400, 500)	[500, 600)	[600, 700)
Personas	2	5	10	17	11	4	1

¿A partir de qué datos se encuentran el 60% de las personas que recorren más kilómetros?

G. Comparar dos series de datos, correspondientes a una misma variable estadística, en función de sus parámetros de centralización y dispersión.

9. Dos distribuciones estadísticas A y B tienen la misma desviación típica.
a) Si la media de A es mayor que la de B, ¿cuál tiene mayor coeficiente de variación?
b) Si la media de A es doble que la de B, ¿cómo serán sus coeficientes de variación?

10. A cada sala de una cadena de cines, en cierto día, asistieron 200, 500, 300 y 1000 personas.
a) Calcula la desviación típica del número de asistentes.
b) Si el día del espectador acuden 50 personas más a cada sala, ¿qué efecto tendrá sobre la desviación típica?
c) Calcula el coeficiente de variación en los dos casos y compara los resultados.

Soluciones

1. El sexo es una variable estadística (v.e.) cualitativa.

La talla es una v.e. cuantitativa continua.

El peso es una v.e. cuantitativa continua.

El color del pelo es una v.e. cualitativa.

Las pulsaciones es una v.e. cuantitativa discreta.

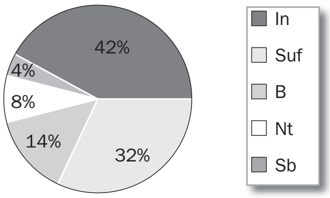
El n.º de hermanos es una v.e. cuantitativa discreta.

2.

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
0	1	1	0,033	0,033
1	7	8	0,233	0,266
2	15	23	0,5	0,766
3	5	28	0,167	0,933
4	2	30	0,067	1
	30		1	

3.

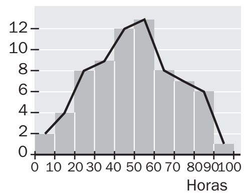
x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
In	21	21	0,42	0,42
Sf	16	37	0,32	0,74
B	7	44	0,14	0,88
Nt	4	48	0,08	0,96
Sb	2	50	0,04	1
	50		1	



4.

$[l_i, l_{i+1})$	x_i	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$
[0, 10)	5	2	2	10
[10, 20)	15	4	6	60
[20, 30)	25	8	14	200
[30, 40)	35	9	23	315
[40, 50)	45	12	35	540
[50, 60)	55	13	48	715
[60, 70)	65	8	56	520
[70, 80)	75	7	63	525
[80, 90)	85	6	69	510
[90, 100)	95	1	70	95
		70		3490

a)



b) $M_o = 55$

$M = 55$

$\bar{x} = \frac{3490}{70} = 49,86$

5. $\bar{x} = \frac{6,8 \cdot 35 + 3,5 \cdot 15}{50} = \frac{290,5}{50} = 5,81$

6. $\bar{x} = \frac{17 \cdot 162 + 21a}{38} = 168$

$21a = 3630 \qquad a = 172,86$

7.

x_i	f_i	$x_i f_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert \cdot f_i$	$x_i^2 f_i$
0	10	0	29,3	0
1	6	6	11,58	6
2	3	6	2,79	12
3	2	6	0,14	18
4	2	8	2,14	32
6	2	12	6,14	72
8	1	8	5,07	64
15	1	15	12,07	225
21	1	21	18,07	441
	28	82	87,3	870

a) $R = 21 \quad \bar{x} = \frac{82}{28} = 2,93$ faltas $\quad D_{\bar{x}} = \frac{87,3}{28} = 3,12$

b) $s^2 = \frac{870}{28} - 2,93^2 = 22,49 \qquad s = 4,74$

8.

$[l_i, l_{i+1})$	x_i	f_i	F_i
[0, 100)	50	2	2
[100, 200)	150	5	7
[200, 300)	250	10	17
[300, 400)	350	17	34
[400, 500)	450	11	45
[500, 600)	550	4	49
[600, 700)	650	1	50
		50	

$\frac{40 \cdot 50}{100} = 20 \Rightarrow P_{40} = 350$

9. $CV = \frac{s}{\bar{x}}$, por tanto, si la media de *A* es mayor que la de *B*, su coeficiente de variación será menor.

Si la media de *A* es el doble que la media de *B*, el coeficiente de variación será la mitad.

10. $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{2000}{4} = 500$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 . f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1\,380\,000}{4} - 250\,000} = 308,22$$

b) La media aumentará en 50 siendo por tanto 550, pero la desviación típica no variará.

c) En el primer caso el coeficiente de variación vale

$CV_1 = \frac{308,22}{500} = 0,62$

En el segundo caso el coeficiente de variación vale

$CV_2 = \frac{308,22}{550} = 0,56$

Se observa que es menor ya que ha aumentado la media sin que aumente la desviación típica.

12 Distribuciones bidimensionales

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Elaborar e interpretar tablas estadísticas bidimensionales.

1. Se ha realizado una encuesta preguntando por el número de personas que habitan el hogar familiar y el número de habitaciones que tiene la casa. La tabla siguiente recoge la información obtenida.

N.º personas (x_i)	3	5	4	6	2	2	2	5	4	7	2	6	1	2	3
N.º habitaciones (Y_i)	2	3	4	4	2	3	2	3	3	4	3	3	1	3	2

Construye, con los datos anteriores, una tabla de doble entrada en la que figuren las frecuencias marginales de cada variable.

B. Hallar las distribuciones marginales de una variable bidimensional y calcular e interpretar sus parámetros estadísticos.

2. Los valores de dos variables *X*, *Y*, estudiadas en 60 individuos, se distribuyen según la siguiente tabla.

Y \ *X*	**1**	**3**	**5**	
2	7		6	
4		9		17
6			3	20

a) Completa la tabla.

b) ¿Cuál es la moda de *Y*?

c) Calcula la media de *X*

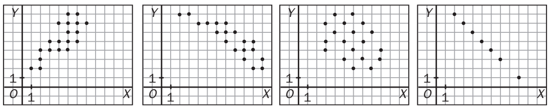
C. Calular la covarianza.

3. Halla la covarianza de la variable bidimensional cuyos datos se recogen en la siguiente tabla.

X	2	2	3	4	5
Y	6	5	5	4	3

D. Representar gráficamente los datos contenidos en una tabla de doble entrada, y a la vista de la nube de puntos determinar la existencia de correlación entre ambas variables indicando el tipo y la fortaleza de la misma.

4. Analiza las siguientes nubes de puntos indicando en cada caso si existe o no correlación entre las variables *X* e *Y*, y de qué tipo es.



E. Calcular el coeficiente de correlación e interpretar el grado de relación existente entre las variables.

5. Se ha medido el número medio de horas de entrenamiento a la semana de un grupo de 10 atletas y el tiempo, en minutos, que han hecho en una carrera, obteniendo los siguientes resultados.

***X* (horas entrenamiento)**	5	6	6	5	8	6	8	10	7	4
***Y* (tiempo carrera)**	30	23	24	24	22	21	24	20	23	28

Calcula el coeficiente de correlación.

F. Hallar las rectas de regresión y efectuar estimaciones con ella, estableciendo la fiabilidad de las estimaciones realizadas.

6. La media de los pesos de los individuos de una población es de 65 kg y la de sus estaturas, 170 cm.

Las desviaciones típicas son 5 kg y 10 cm, respectivamente, y la covarianza de ambas variables es 40.

a) ¿Cuál es el coeficiente de correlación?

b) Calcula la recta de regresión de los pesos respecto de las estaturas.

c) ¿Cuánto estimas que pesará un individuo de 180 cm de estatura?

7. De una distribución bidimensional (x, y) conocemos los siguientes resultados:

- Recta de regresión de *Y* sobre *X*: $y = 8{,}7 - 0{,}76x$
- Recta de regresión de *X* sobre *Y*: $y = 11{,}36 - 1{,}3x$

a) Calcula el centro de gravedad de la distribución.

b) Halla el coeficiente de correlación.

G. Calcular la ecuación de la recta de Tukey.

8. Considera la siguiente tabla correspondiente a los valores que toman dos variables estadísticas *X* e *Y*.

X	1	3	4	5	7	8	9	10	11	12	14	16	23
Y	7	11	13	15	15	17	16	18	3	18	20	21	4

a) Representa la nube de puntos.

b) A la vista de la gráfica anterior ¿crees que existe correlación? ¿De qué tipo?

c) Justifica los datos anteriores y calcula la ecuación de la recta de Tukey.

Soluciones

1.

Y \ X	1	2	3	4	5	6	7	f(Y)
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	0	2	2	0	0	0	0	4
3	0	3	0	1	2	1	0	7
4	0	0	0	1	0	1	1	3
f(X)	1	5	2	2	2	2	1	15

2. a)

Y \ X	1	3	5	
2	7	10	6	23
4	3	9	5	17
6	6	11	3	20
	16	30	14	60

b) 2.

c) $x = \dfrac{1 \cdot 16 + 3 \cdot 30 + 5 \cdot 14}{60} = 2,93$

3.

x_i	y_i	$x_i\,y_i$
2	6	12
2	5	10
3	5	15
4	4	16
5	3	15
16	23	68

$\bar{x} = \dfrac{16}{5} = 3,2$

$\bar{y} = \dfrac{23}{5} = 4,6$

$S_{XY} = \dfrac{68}{5} - 3,2 \cdot 4,6 = -1,12$

4. En el primer caso se observa que existe correlación lineal positiva fuerte.

En el segundo caso se observa que existe correlación lineal negativa fuerte.

En el tercer caso no se observa correlación.

En el cuarto caso hay una correlación funcional (lineal) negativa.

5.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\,y_i$
5	30	25	900	150
6	23	36	529	138
6	24	36	576	144
5	24	25	576	120
8	22	64	484	176
6	21	36	441	126
8	24	64	576	192
10	20	100	400	200
7	23	49	529	161
4	28	16	784	112
65	239	451	5795	1519

$\bar{x} = \dfrac{65}{10} = 6,5$

$s_X = \sqrt{\dfrac{451}{10} - 6,5^2} = 1,69$

$\bar{y} = \dfrac{239}{10} = 23,9$

$s_Y = \sqrt{\dfrac{5795}{10} - 23,9^2} = 2,88$

$S_{XY} = \dfrac{1519}{10} - 6,5 \cdot 23,9 = -4,45 = -4,45$

$r = \dfrac{-4,45}{11,69 \cdot 2,88} = -0,91$

6. a) $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{40}{5 \cdot 10} = 0,8$

b) $y - 65 = \dfrac{40}{100}(x - 170) \Rightarrow y = 0,4x - 3$

c) $y = 0,4 \cdot 180 - 3 = 69$ kg

7. a) El centro de gravedad será el punto de corte entre las dos rectas.

$-0,76x + 8,7 = -1,3x + 11,36$

$0,54x = 2,66$

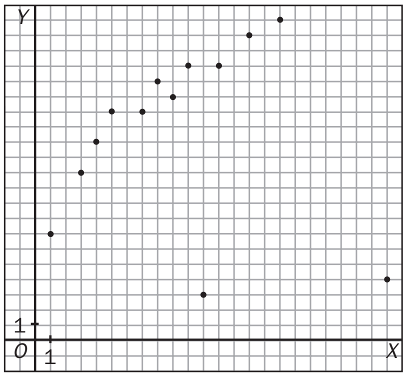
$x = 4,93 \Rightarrow y = -0,76 \cdot 4,93 + 8,7 = 4,95$

El centro de gravedad es: (4,93; 4,95).

b) Para hallar r tenemos en cuenta que el producto de las pendientes de las dos rectas de regresión es igual a r^2

$r^2 = -0,76 \cdot (-1,3) = 0,988 \qquad r = 0,99$

8. a)



b) En el apartado anterior hemos representado la nube de puntos y del análisis de la misma, si obviamos los dos puntos muy alejados del resto, parece deducirse que si existe una correlación lineal positiva y bastante fuerte entre esas dos variables.

c) 1.º Ordenamos los puntos en orden creciente de abcisas.

2.º Se subdivide el conjunto *S* en tres grupos, *G*1, *G*2 y *G*3. Como hay 13 puntos *G*1 y *G*3 tendrán 4 puntos y *G*2, 5.

3.º Calculamos para cada grupo *Gi* ($i = 1, 2, 3$) el punto *Pi*, cuyas coordenadas (x_i, y_i) son respectivamente las medianas de las abscisas y ordenadas de los puntos del grupo. En nuestro caso son:

$G1 = \{(1,\ 7)(3,\ 11)(4,\ 13)(5,\ 15)\} \qquad P1 = (3,5; 12)$

$G2 = \{(7, 15)(8, 17)(9, 16)(10, 18)(11, 3)\}\ P2 = (9, 16)$

$G3 = \{(12, 18)(14, 20)(16, 21)(23, 4)\}\ P3 = (15, 19).$

4.º Calculamos la pendiente de la recta que pasa por *P*1 y *P*3.

$$m = \frac{19 - 12}{15 - 3,5} = \frac{7}{11,5} = 0,61$$

5.º Por último calculamos la ecuación de la recta que pasa por el baricentro *B* de (*P*1, *P*2, *P*3) y tiene de pendiente *m*.

$$B = \left(\frac{3,5 + 9 + 15}{3}, \frac{12 + 16 + 19}{3}\right) = (9,16; 15,66)$$

$$y - 15,66 = \frac{7}{11,5}(x - 9,16) \Rightarrow y = 0,61x - 10,08$$

y esa es la ecuación de la recta de Tukey.

13 Cálculo de probabilidades

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Plantear y resolver problemas de recuento que requieran el uso de técnicas o de métodos sistemáticos.	**1.** Examinado el color de los ojos y del pelo de 5000 individuos, ha resultado que hay 1225 rubios con ojos claros, 3725 morenos y 3625 con ojos oscuros. ¿Cuántos estudiantes son rubios? ¿Cuántos son morenos y tienen los ojos azules?
B. Plantear y resolver problemas de recuento que requieran el uso de técnicas de combinatoria.	**2.** ¿Cuántos números capicúas hay de ocho cifras? **3.** Utilizando los 7 colores del arco iris, ¿cuántas banderas de tres franjas horizontales iguales en tamaño y de distinto color se pueden formar?
C. Formar el espacio muestral y calcular el número de puntos muestrales de un suceso.	**4.** Un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado; si el número obtenido es par se extrae una bola de una urna U_1 que contiene 5 bolas rojas, 2 verdes y 3 negras; si el resultado en el dado es impar se extrae una bola de una urna U_2 que contiene 5 bolas rojas y 5 negras. Escribe el espacio muestral asociado a dicho experimento.
D. Efectuar operaciones con sucesos y aplicar sus propiedades para efectuar simplificaciones.	**5.** Tenemos una urna con ocho bolas numeradas del 2 al 9. Realizamos el experimento consistente en extraer una bola de dicha urna. a) Escribe los siguientes sucesos: $A = \{\text{sacar un número primo}\}$ $B = \{\text{sacar un número cuadrado perfecto}\}$ $C = \{\text{sacar un número mayor que 5}\}$. b) Escribe los sucesos contrarios de A, B y C. c) Escribe los siguientes sucesos: $A \cup B$; $B \cup C$, $A \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cap B^c$ y $A \cap B^c \cap C^c$.
E. Asignar probabilidades mediante la regla de Laplace, empleando técnicas de recuento directo y recursos combinatorios.	**6.** En el juego de la ruleta, una bola puede caer en cualquiera de las casillas numeradas del **0** al **36**. Hay 18 casillas rojas, 18 negras y una blanca (el cero). Se hace girar la ruleta. Calcula la probabilidad de que la bola caiga en las siguientes casillas. a) Casilla negra. b) Casilla impar. c) Casilla par mayor que 29.
F. Calcular la probabilidad condicionada de un suceso en un experimento simple.	**7.** De los 105 alumnos matriculados en 1.º de Bachillerato, 45 cursan la modalidad de Ciencias y Tecnología, 33 Ciencias Sociales y el resto Artes. Se sabe que 33 alumnos cursan francés como primer idioma y que de los alumnos que estudian inglés, 17 estudian Artes y 30 Ciencias y Tecnología. Se escoge un estudiante al azar, sabiendo que estudia inglés, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculado en la modalidad de Ciencias Sociales?
G. Determinar si dos sucesos son dependientes o independientes.	**8.** Dados los sucesos A y B, de los que se conoce $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cup B) = 0{,}8$, indica si son independientes.
H. Formar el sistema completo de sucesos asociado a un experimento aleatorio compuesto y asignar probabilidades a sucesos mediante el teorema de la probabilidad total.	**9.** En una caja hay tres llaveros **A**, **B** y **C**, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que solo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y de este una llave y se pide lo siguiente. a) ¿Cuál es la probabilidad de que la llave escogida abra la puerta del trastero? b) ¿Cuál es la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y que la llave no abra?
I. Calcular probabilidades a posteriori.	**10.** Una empresa del ramo de la alimentación elabora sus productos en cuatro factorías **F1**, **F2**, **F3** y **F4**. El porcentaje de producción total que se fabrica en cada factoría es del 40%, 30%, 20% y 10% respectivamente, y además el porcentaje de envasado incorrecto en cada factoría es del 1%, 2%, 7% y 4%. Tomamos un producto de la empresa al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se esté defectuosamente envasado? Si tomado un producto al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la factoría **F2**? ¿Y de la **F1**?

Soluciones

1. Completamos la siguiente tabla de contingencia:

	Rubios	Morenos	
Ojos claros	1225	150	1375
Ojos oscuros	50	3575	3625
	1275	3725	500

Hay 1275 rubios y 150 morenos con ojos claros.

2. Un número capicúa de 8 cifras tendrá la forma *ABCDDCBA*, en donde *A* no puede ser cero ya que entonces el número tendría sólo 7 cifras; por tanto tenemos 9 posibles valores para *A* (unidades y decenas de millones) y 10 posibles valores para *B*, *C* y *D*; por lo que, aplicando el principio multiplicativo, el número de capicúas de ocho cifras será:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$$

3. Debemos elegir 3 colores, de entre los 7 del arco iris, para colorear cada una de las tres franjas horizontales e iguales en que está dividida la bandera.

Claramente el orden influye pues son distintas una bandera Azul-Roja-Verde, que una Azul-Verde-Roja.

Por tanto, el número de banderas distintas será igual a $V_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

4. $E = \{(2,R), (2,V), (2,N), (4,R), (4,V), (4,N), (6,R), (6,V), (6,N), (1,R), (1,N), (3,R), (3,N), (5,R), (5,N)\}$

5. a) $A = \{2, 3, 5, 7\}$

$B = \{4, 9\}$

$C = \{6, 7, 8, 9\}$

b) $A^C = \{4, 6, 8, 9\}$

$B^C = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$;

$C^C = \{2, 3, 4, 5\}$.

c) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

$B \cup C = \{4, 6, 7, 8, 9\}$

$A \cap C = \{7\}$

$A \cap B \cap C = \varnothing$

$A \cap B^C = A$

$A \cap B^C \cap C^C = A \cap C^C = \{2, 3, 5\}$

6. $P(N) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

$P(I) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

$P(P > 29) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

7. Formamos la siguiente tabla de contingencia:

	Artes	C. S.	C. y T.	
Francés	10	8	15	33
Inglés	17	25	30	72
	27	33	45	105

$$P(\text{C. S./Inglés}) = \frac{25}{72} = 0{,}34\widehat{72}$$

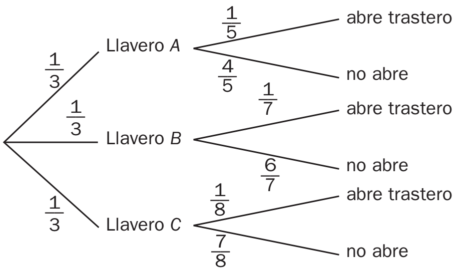
8. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) =$

$= 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}8 = 0{,}3$

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$

Son independientes.

9.

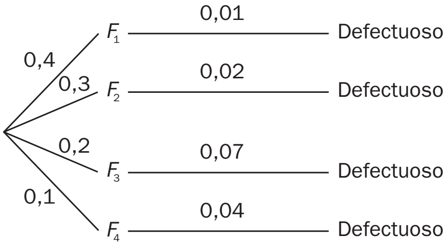


a) $P(T) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{8} =$

$= \dfrac{56 + 40 + 35}{840} = \dfrac{131}{840}$

b) $P(C \cap NT) = P(C) \cdot P(NT/C) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{7}{8} = \dfrac{7}{24}$

10.



$P(D) = 0{,}4 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}07 +$

$+ 0{,}1 \cdot 0{,}04 = 0{,}028$

$P(F_2/D) = \dfrac{P(D/F_2) \cdot P(F_2)}{P(D)} = \dfrac{0{,}02 \cdot 0{,}3}{0{,}028} =$

$= \dfrac{6}{28} = \dfrac{3}{14}$

$P(F_2/D) = \dfrac{P(D/F_1) \cdot P(F_1)}{P(D)} = \dfrac{0{,}01 \cdot 0{,}4}{0{,}028} =$

$= \dfrac{4}{28} = \dfrac{1}{7}$

14 Distribuciones discretas. La distribución binomial

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Obtener la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta (v.a.d.).

1. Las camadas de lobo ibérico suelen constar de 5 cachorros y la probabilidad de nacimientos de ambos sexos coincide. Consideremos la variable aleatoria X = "número de hembras en una camada de lobo ibérico".

a) Esa variable aleatoria ¿es discreta o continua? Justifica tu respuesta.

b) Determina la función de probabilidad de esta variable aleatoria y represéntala gráficamente.

B. Calcular los parámetros de una v.a.d., media o esperanza matemática, varianza y desviación típica.

2. La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,2	a	b	0,25

a) Sabiendo que $E(X) = 1{,}55$ halle el valor de a y de b.

b) Calcule Var (X).

C. Determinar si una función puede ser función de probabilidad asociada a una v.a.d.

3. Calcula el valor de k para que la siguiente función sea una función de probabilidad.

$$P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{k}{x} & x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

D. Calcular, utilizando la función de probabilidad, la probabilidad de que una v.a.d. tome unos valores concretos.

4. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X viene dada por $P(X = x) = k \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$, para $x = 0, 1, 2, 3, \dots$

a) Halla el valor de k.

b) Calcula las siguientes probabilidades: $P(X < 6)$; $P(X \geqslant 3)$

E. Aplicar las propiedades de los números combinatorios.

5. Reduce la siguiente expresión a un número combinatorio $\binom{x}{12} + \binom{x}{13} + \binom{x+1}{14}$

F. Desarrollar la potencia de un binomio mediante la fórmula del binomio de Newton.

6. Escribe el desarrollo completo de $(2x - 5)^5$.

G. Calcular la expresión algebraica de algunos de los términos de la potencia de un binomio.

7. ¿Cuál es el coeficiente de x^{10} de $(2 - 3x^2)^7$?

H. Calcular la función de probabilidad y los parámetros de una v.a.d. que sigue un modelo binomial.

8. Para formar el jurado de un premio, se elige al azar a seis alumnos de Bachillerato de una provincia, de los cuales el 35% son hombres. ¿Cuántos hombres hay en el jurado?

I. Asignar probabilidades a sucesos de carácter binomial.

9. En una ciudad hay una epidemia de gripe que afecta al 10% de la población. Calcula la probabilidad de que elegidas 5 personas al azar se den los siguientes casos.

a) Exactamente 2 personas tengan gripe.

b) Al menos 2 personas tengan gripe.

J. Resolver problemas de ajuste de distribuciones empíricas por distribuciones binomiales.

10. Un jugador de baloncesto efectúa 500 series de tres tiros libres obteniendo los siguientes resultados.

N.° de aciertos por serie	0	1	2	3
N.° de series	110	213	144	33

a) ¿Es factible ajustar esta distribución de datos por una binomial? En caso afirmativo determina la $B(n, p)$ que mejor se ajuste a esos datos empíricos.

b) Valora la bondad del ajuste.

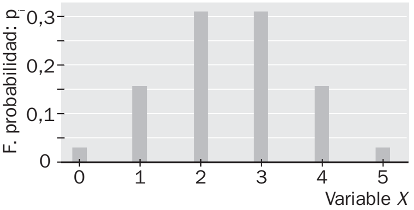
Soluciones

1. a) Se trata de una variable aleatoria discreta que solo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4 y, 5.

b) Para calcular la probabilidad de cada posible valor de la variable observamos que estamos ante una binomial de parámetros

$n = 5$; $p = 0{,}5$ y por tanto

$P(X = 0) = 0{,}0313$	$P(X = 3) = 0{,}3125$
$P(X = 1) = 0{,}1563$	$P(X = 4) = 0{,}1563$
$P(X = 2) = 0{,}3125$	$P(X = 5) = 0{,}0313$



2. a) Por ser una distribución de probabilidad debe cumplirse que:

$0{,}2 + a + b + 0{,}25 = 1 \rightarrow a + b = 0{,}55$

$\mu = a + 2b + 0{,}75 = 1{,}55 \rightarrow a + 2b = 0{,}80$

Resolviendo el sistema: $a = 0{,}30$ y $b = 0{,}25$

b) $\sigma = 0 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}25 + 9 \cdot 0{,}25 - 1{,}55^2 = 1{,}17$

3. Por ser una función de probabilidad debe cumplir que

$$\frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} = 1 \rightarrow \frac{25k}{12} = 1 \rightarrow k = \frac{12}{25}$$

4. a) Por ser una función de probabilidad, la suma de todas las probabilidades debe de ser igual a 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = k \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \cdot k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

b) $$P(X < 6) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^5\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6 - \frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{211}{243}$$

$$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - \left(\frac{12}{23} + \frac{14}{29}\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

5. $$\binom{x}{12} + \binom{x}{13} + \binom{x+1}{14} = \binom{x+1}{13} + \binom{x+1}{14} = \binom{x+2}{14}$$

6. $$(2x - 5)^5 = \binom{5}{0}(2x)^5 - \binom{5}{1}(2x)^4 \cdot 5 + \binom{5}{2}(2x)^3 \cdot 5^2 -$$

$$- \binom{5}{3}(2x)^2 \cdot 5^3 + \binom{5}{4}(2x) \cdot 5^4 + \binom{5}{5}5^5 = 32x^5 -$$

$$- 5 \cdot 16x^4 \cdot 5 + 10 \cdot 8x^3 \cdot 25 - 10 \cdot 4x^2 \cdot 125 + 5 \cdot 2x \cdot 625 -$$

$$- 3125 = 32x^5 - 400x^4 + 200x^3 - 5000x^2 + 1250x - 3125$$

7. $-\binom{7}{5}2^2 \cdot 3^5 = -21 \cdot 4 \cdot 243 = -20\,412$

8. Sea X la variable que indica el número de hombres elegidos en el jurado.

$P(\text{elegir hombre}) = 0{,}35$

Se trata de una binomial de parámetros $n = 6$ y $p = 0{,}35$.

Por tanto el número de hombres esperado es:

$n \cdot p = 6 \cdot 0{,}35 = 2{,}1 \Rightarrow 2$ hombres

9. La variable aleatoria X = número de personas con gripe sigue una distribución binomial $B(5;\ 0{,}1)$, por tanto:

a) $P(X = 2) = 0{,}0729$

b) $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$

$= 1 - 0{,}5905 - 0{,}3281 = 0{,}0814$

10. a) Si la probabilidad de que el jugador encestase una canasta la consideremos constante, estaríamos ante una binomial ya que:

I. Al tirar a canasta sólo son posibles dos resultados acertar o fallar.

II. El resultado de cada lanzamiento es independiente del resultado de los demás.

III. La probabilidad de acierto se mantiene constante.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
0	110	0
1	213	213
2	144	288
3	33	99
	500	600

$\bar{x} = \frac{600}{500} = 1{,}2$

$\bar{x} = 1{,}2 = 3 \cdot p$

$p = 0{,}4$

$q = 0{,}6$

La distribución empírica la ajustaríamos mediante una $B(3,\ 0.4)$.

b) Para valorar la bondad del ajuste estudiamos, según el modelo teórico, en cuántas series el jugador anotaría 0, 1, 2 ó 3 de los tres tiros libres. Para ello calculamos $P(X = k)$ para $k = 0$, 1, 2 y 3. Después se multiplica por 500

$P(X = 0) = 0{,}216$	$500 \cdot 0{,}216 = 108$
$P(X = 1) = 0{,}432$	$500 \cdot 0{,}432 = 216$
$P(X = 2) = 0{,}288$	$500 \cdot 0{,}288 = 144$
$P(X = 3) = 0{,}064$	$500 \cdot 0{,}064 = 32$

Los resultados se ordenan en la siguiente tabla:

Número de aciertos	0	1	2	3
N.º series observadas	110	213	144	33
N.º series esperadas	108	216	144	32

Analizamos la diferencia entre los datos reales y los esperados y se observa que hay muy poca diferencia, por tanto el ajuste es bueno.

15 Distribuciones continuas. La distribución normal

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Conocer las características de una distribución continua.

1. De cierta variable aleatoria, *X*, conocemos que puede tomar cualquier valor perteneciente al intervalo $[-2\ ,\ 8]$, y que la probabilidad de que dicha variable tome un valor negativo es 0,2. Se pide lo siguiente.

a) La variable aleatoria *X*, ¿es discreta o continua? ¿Por qué?

b) Calcula $P(X > 0)$.

B. Determinar, en casos sencillos, si una determinada función se corresponde a una función de densidad asociada a una variable aleatoria continua.

2. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x \text{ si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$$

a) Represéntala gráficamente

b) Comprueba que es una función de densidad.

c) Calcula, apoyándote en la gráfica, $P(X \leqslant 1{,}5)$.

C. Dominar los procedimientos de tipificación y cálculo de probabilidades en distribuciones normales.

3. Sea *X* una variable que sigue una distribución normal. $N(6,\ 2)$. Calcula las siguientes probabilidades

a) $P(X \leqslant 7)$ b) $P(4{,}5 \leqslant X \leqslant 5{,}5)$ c) $P(X > 5)$

4. La variable *X* sigue una distribución $N(5;\ 1{,}5)$. Obtén el valora para que $P(X > a) = 0{,}72$.

D. Resolver problemas de v.a.c. de distribución $N(\mu,\ \sigma)$.

5. Las pilas de linterna de una marca determinada tienen una vida media, en horas, que se distribuye según una ley normal $N(80,\ 2)$. De una partida de 500 pilas, responde.

a) ¿Cuántas puede esperarse que duren entre 75 y 82 horas?

b) Si se consideran como pilas especiales a aquellas que están dentro del 20% de las que más duran: ¿a partir de qué tiempo de duración se considera que una pila es especial?

E. Determinar si una variable aleatoria discreta que siga una distribución $B(n,\ p)$ puede ajustarse mediante una normal.

6. Un tirador acierta en el blanco con probabilidad 0,8. Calcula la probabilidad de que al hacer seis disparos se den los siguientes casos.

a) No acierte ninguno. b) Acierte todos. c) Acierte como mucho 2.

Si suponemos que el tirador realiza 1000 disparos y su probabilidad de acierto se mantiene constante, ¿puede aproximarse la variable estadística que mide el número de aciertos en 1000 tiradas por una distribución normal? ¿Por cuál? Justifica tu respuesta.

De acuerdo con el resultado anterior, calcula la probabilidad de los siguientes casos.

d) El tirador acierte más de 810 disparos.

e) El número de aciertos esté entre 795 y 820, ambos incluidos.

F. Utilizar la distribución normal para calcular probabilidades surgidas en un caso binomial.

7. El examen teórico para obtener el carnet de conducir consiste en un cuestionario con 40 preguntas, cada una de las cuales ofrece tres posibles respuestas de las que solo una es válida.

Se considera a un aspirante apto si no falla más del 10% de las preguntas. Calcula la probabilidad de pasar el examen contestando el cuestionario al azar.

G. Resolver problemas de ajuste de distribuciones empíricas por distribuciones normales.

8. Se sabe que la media y la desviación típica de los pesos de 54 alumnos son $\mu = 66{,}39$ y $\sigma = 6{,}78$. para calcularlas se han utilizado los siguientes datos:

Peso (kg)	[50-55)	[55-60)	[60-65)	[65-70)	[70-75)	[75-80)	[80-85)
N.º alumnos	3	7	12	15	11	6	2

a) Representa los datos anteriores mediante un histograma y dibuja el polígono de frecuencias correspondiente.

b) A la vista de los datos anteriores ¿Crees oportuno ajustar dicha distribución empírica por una normal? ¿Por cuál?

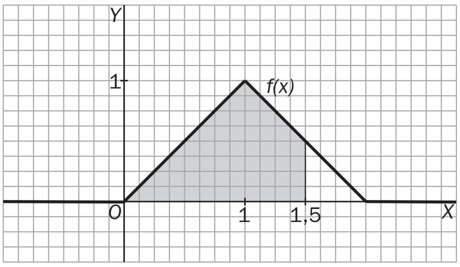
c) Utiliza la distribución normal encontrada en el apartado anterior para calcular el porcentaje teórico de alumnos con un peso comprendido entre 58 y 73 Kg.

Soluciones

1. a) X es una variable aleatoria continua, ya que puede tomar cualquier valor real perteneciente al intervalo $(-2, 8)$.

b) $P(X > 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

2. a)



b) Claramente verifica todas las características de una función de densidad:

- $f(x) \geqslant 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.
- el área encerrada por dicha función y el eje OX vale 1 (triángulo de base 2 y altura 1).

c) La probabilidad $P(X \leqslant 1{,}5)$ equivale al área de la región sombreada:

$$P(X \leqslant 1{,}5\ ) = 1 - \frac{0{,}5^2}{2} = 0{,}875$$

3. a) $P(X \leqslant 7) = P\left(Z \leqslant \frac{7 - 6}{2}\right) = P(Z \leqslant 0{,}5) = 0{,}6915$

b) $P(4{,}5 \leqslant X \leqslant 5{,}5) = P\left(\frac{4{,}5 - 6}{2} \leqslant Z \leqslant \frac{5{,}5 - 6}{2}\right) =$

$= P(-0{,}75 \leqslant Z \leqslant -0{,}25) = P(0{,}25 \leqslant Z \leqslant 0{,}75) =$

$= P(Z \leqslant 0{,}75) - P(Z \leqslant 0{,}25) = 0{,}7734 - 0{,}5987 =$

$= 0{,}1747$

c) $P(X > 5) = P\left(Z > \frac{5 - 6}{2}\right) = P(Z > -0{,}5) =$

$= 1 - P(Z < 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$

4. $0{,}72 = P(X > a) = P\left(Z > \frac{a - 5}{1{,}5}\right) =$

$= 1 - P\left(Z \leqslant \frac{a - 5}{1{,}5}\right) \Rightarrow P\left(Z \leqslant \frac{a - 5}{1{,}5}\right) = 0{,}28$

Buscamos un número A que cumpla

$P(Z \leqslant -\ A) = 0{,}72 \Rightarrow -A = 0{,}58$

$\frac{a - 5}{1{,}5} = -0{,}58 \Rightarrow a = 5 - 0{,}58 \cdot 1{,}5 = 4{,}13$

5. a) $P(75 < X < 82) = P\left(\frac{75 - 80}{2} < Z < \frac{82 - 80}{2}\right) =$

$= P(-2{,}5 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -2{,}5) =$

$= P(Z < 1) - 1 + P(Z < 2{,}5) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}9938 =$

$= 0{,}8351$

83,51% de 500 = 417,55

418 pilas

b) $0{,}2 = P(X > a) = P\left(Z > \frac{a - 80}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(Z \leqslant \frac{a - 80}{2}\right) = 0{,}8 \Rightarrow \frac{a - 80}{2} = 0{,}84$

$a = 81{,}68$. A partir de 82 horas.

6. Consideramos la variable que indica el número de tiros acertados, se trata de una binomial de parámetros $n = 6$ y $p = 0.8$.

a) $P(X = 0) = \binom{6}{0} \cdot 0{,}2^6 = 0{,}0006$

b) $P(X = 6) = \binom{6}{0} \cdot 0{,}8^6 = 0{,}2621$

c) $P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$= 0{,}0006 + 0{,}0015 + 0{,}0154 = \ 0{,}0175$

Nos encontramos ante una $B(1000, 0{,}8)$ con $n \cdot p \geqslant 5$ y $n \cdot q \geqslant 5$, por lo que podemos aproximarla por una normal de parámetros

$\mu = n \cdot p = 800$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{160} = 12{,}65$

d) $P(X > 810) = P(Y > 810{,}5) =$

$= P\left(Z > \frac{810{,}5 - 800}{12{,}65}\right) = P(Z > 0{,}83) =$

$= 1 - P(Z \leqslant 0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}203$

e) $P(795 < X < 820) = P(794{,}5 < Y < 820{,}5) =$

$= P\left(\frac{794{,}5 - 800}{12{,}65} < z < \frac{820{,}5 - 800}{12{,}65}\right) =$

$= P(-0{,}43 < Z < 1{,}62) =$

$= P(Z < 1{,}62) - P(Z < -0{,}43) =$

$= P(Z < 1{,}62) - 1 + P(Z < 0{,}43) =$

$= 0{,}9474 - 1 + 0{,}6664 = 0{,}6138$

7. Estamos ante una binomial $B\left(40, \frac{1}{3}\right)$. Como $n \cdot p \geqslant 5$ y $n \cdot q \geqslant 5$, se puede aproximar por una normal de parámetros

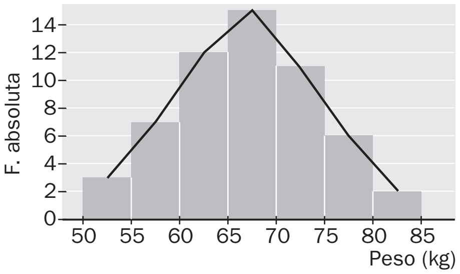
$\mu = n \cdot p = 13{,}3$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 2{,}98$

$P(X \geqslant 36) = P\left(Z > \frac{35{,}5 - 13{,}3}{2{,}98}\right) = P(Z \geqslant 7{,}45) =$

$= 1 - P(Z < 7{,}45) = 1 - 1 = 0$

8. a)



b) Si; por una $N(66{,}4;\ 6{,}78)$.

c) $P(58 < x < 73) = P\left(\frac{58 - 66{,}4}{6{,}8} < z < \frac{73 - 66{,}4}{6{,}8}\right) =$

$= P(-1{,}24 < Z < 0{,}97) = P(Z < 0{,}97) - P(Z < -1{,}24) =$

$= P(Z < 0{,}97) - 1 + P(Z < 1{,}24) =$

$= 0{,}8340 - 1 + 0{,}8925 = 0{,}7265$

El 72,65% de los alumnos pesarán entre 58 y 73 kg.

Prueba final A

Nombre: **Grupo:** **Fecha / /**

1. a) Depositamos 3500 € en un banco al 4% de interés compuesto, con capitalización semestral, durante tres años. ¿Qué capital obtendremos al final del período?

b) Hemos comprado una motocicleta que costaba 3300 € y debemos pagarla en 7 años, con un interés del 5% anual, mediante pagos mensuales constantes. ¿Cuál será el importe de dichas mensualidades?

2. Calcula la solución de la ecuación, la inecuación y el sistema de ecuaciones siguientes.

a) $\sqrt{x} - \sqrt{x - 3} = 1$ b) $2x^2 - x - 3 \leqslant 0$ c) $\begin{cases} x - 2y - z = 5 \\ 2x + y + z = 1 \\ -3x - y + 2z = 4 \end{cases}$

3. a) Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & \text{si } -1 \leqslant x \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} + b & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en toda la recta real. Representa gráficamente dicha función

b) Calcula los siguientes límites; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

4. Calcula el dominio, los puntos de discontinuidad y las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 5}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x - 3}$ c) $h(x) = \ln(3x^2 - x + \operatorname{sen} x)$ d) $i(x) = e^{-x}(5 - x^2)$

6. La siguiente tabla muestra la talla en cm y el peso de 10 jóvenes de 14 años.

X (cm)	146	150	151	155	160	160	161	161	164	164
Y (kg)	44	46	47	48	50	51	52	54	54	59

a) Dibuja la nube de puntos (o diagrama de dispersión) correspondiente a esta variable bidimensional. A la vista de los resultados obtenidos, indica si existe correlación entre estas dos variables y, en caso afirmativo, di de qué tipo es.

b) Calcula la media y la desviación típica de cada una de las dos variables unidimensionales: X e Y.

c) Calcula la covarianza de la variable bidimensional (X, Y) y el coeficiente de correlación lineal.

d) Calcula la ecuación de la recta de regresión de la variable Y (peso) sobre la variable X (talla). ¿Cuánto se espera que pese un joven que mide 158 cm? ¿Y uno que mide 180 cm? ¿Cuál de las dos previsiones te parece más fiable? ¿Por qué?

7. Una epidemia de gripe afecta al 30% de la población.

a) Calcula la probabilidad de que en una familia de 6 miembros:

i) No esté enfermo ninguno.

ii) La mitad de la familia esté enferma.

b) Si en un centro de enseñanza hay matriculados 200 alumnos, calcula la probabilidad de que:

i) Haya 55 afectados de gripe.

ii) Haya más de 55 y menos de 70 enfermos de gripe.

Soluciones

1. a) $C_F = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{200}\right)^s$ (s es el número de semestres).

$C_F = 3500 \cdot \left(1 + \frac{4}{200}\right)^6 = 3500 \cdot (1{,}02)^6 =$

$= 3941{,}57$ €

b) $m = \dfrac{3300 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{84} \cdot \frac{5}{1200}}{\left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{84} - 1} = 46{,}64$ €

2. a) $\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{x-3} + 1\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = x - 3 + 1 + 2 \cdot \sqrt{x-3} \Rightarrow \sqrt{x-3} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 3 = 1 \rightarrow x = 4$

b) $2x^2 - x - 3 \leqslant 0 \rightarrow 2(x+1) \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \leqslant 0$

Construimos la tabla de signos:

$-\infty \qquad 1 \qquad \frac{3}{2} \qquad +\infty$

$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$x - \frac{3}{2}$	$-$	$+$	$+$
$2x^2 - x - 3$	$+$	$-$	$+$

S: $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

c) Se aplica el método de Gauss:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 5 \\ 2x + y + z = 1 \\ -3x - y + 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow[E_3 + 3E_1]{E_2 - 2E_1} \begin{cases} x - 2y - z = 5 \\ 5y + 3z = -9 \\ -7y - z = 19 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[5E_3 + 7E_2]{} \begin{cases} x - 2y - z = 5 \\ 5y + 3z = -9 \\ 16z = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

3. a) f es continua en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 1)$ al ser polinómica. En $(1, +\infty)$ es continua, ya que no se anula el denominador. Para que sea continua en -1 y en 1 deben coincidir los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to -1^-} (-x^2 + a \cdot x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 - a = 2 \Rightarrow a = -3$

$\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x} + b\right) \Rightarrow 2 = 1 + b \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 - 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 0 + 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1$

4. a) $D(f) = \mathbf{R} - \{-2\}$, ya que -2 es el único valor que anula el denominador.

En $x = -2$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito, ya que

$\lim\limits_{x \to -2^-} (f(x)) = \frac{15}{0^-} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -2^+} (f(x)) = \frac{15}{0^+} = +\infty$

Por tanto, f tiene una asíntota vertical en $x = -2$.

La recta $y = 2x - 7$ es asíntota oblicua de f, ya que:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(2x - 7 + \frac{15}{x + 2}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} (2x - 7) + 0$

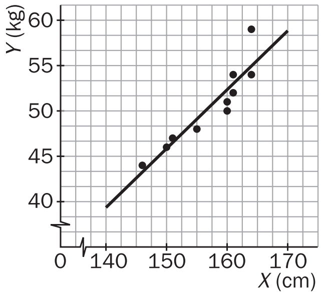
b) $D(f) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, ya que -1 y 1 son los únicos valores que anulan el denominador. En ambos puntos hay discontinuidades inevitables de salto infinito y, por tanto, f tiene como asíntotas verticales las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

También tiene una asíntota horizontal en ambos extremos, ya que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

5. a) $f'(x) = \dfrac{4x - 3}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 3x + 5)^2}}$ c) $h'(x) = \dfrac{9x^2 - 1 + \cos x}{3x^3 - x + \operatorname{sen} x}$

b) $g'(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 6x + 9}$ d) $i'(x) = (x^2 - 2x - 5)e^{-x}$

6. a) Hay correlación lineal positiva entre X e Y.



b) $\overline{x} = 157{,}2 \quad \sigma_x = 5{,}98$

$\overline{y} = 50{,}5 \quad \sigma_y = 4{,}25$

c) $\sigma_{xy} = 23{,}3 \quad r = 0{,}917$

d) $y = 0{,}652x - 51{,}93$

Un joven de 158 cm de estatura se espera que pese $0{,}652 \cdot 158 - 51{,}93 = 51{,}1$ kg.

Para 180 cm de estatura, el peso esperado es 65,4 kg.

Es más fiable la primera predicción, ya que 158 cm se encuentran dentro del intervalo de valores utilizado para el ajuste, muy cerca de la media de las estaturas.

7. a) El número de enfermos de gripe en una familia de 6 miembros sigue una distribución binomial $B(6; 0{,}3)$. Por tanto:

i) $P(X = 0) = \binom{6}{0} \cdot (0{,}3)^0 \cdot (0{,}7)^6 = 0{,}118$

ii) $P(X = 3) = \binom{6}{3} \cdot (0{,}3)^3 \cdot (0{,}7)^3 = 0{,}185$

b) En el caso del colegio estaríamos ante una $B(200; 0{,}3)$, y como $200 \cdot 0{,}3 = 60 > 5$ y $200 \cdot 0{,}7 = 140 > 5$, podemos sustituir dicha binomial por una normal que tenga la misma media y la misma desviación típica.

$E(x) = n \cdot p = 60 \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{42} = 6{,}48$

$B(200; 0{,}3) \approx N(60; 6{,}48)$

i) $P(X < 55) = P(X \leqslant 54{,}5) = P\left(Z \leqslant \frac{54{,}5 - 60}{6{,}48}\right) =$

$= P(Z \leqslant -0{,}85) = P(Z > 0{,}85) = 1 - P(Z < 0{,}85) =$

$= 1 - 0{,}802 = 0{,}198$

ii) $P(55 < X < 70) = P(55{,}5 < X < 69{,}5) =$

$= P\left(\frac{55{,}5 - 60}{6{,}48} < Z < \frac{69{,}5 - 60}{6{,}48}\right) =$

$= P(-0{,}69 < Z < 1{,}47) = P(Z < 1{,}47) - P(Z < -0{,}69) =$

$= P(Z < 1{,}47) + P(Z < 0{,}69) - 1 =$

$= 1 - 0{,}8023 = 0{,}755 + 0{,}929 - 1 = 0{,}684$

Prueba final B

Nombre: **Grupo:** **Fecha / /**

1. a) Se invierte en un banco la cantidad de 5000 € a un interés compuesto del 7,5% anual. Halla el número de años que han de pasar para que la inversión supere los 20000 €.

b) Una persona recibe un préstamo de 10000 € que se compromete a devolver en tres pagos iguales, que se harán al finalizar cada uno de los tres años sucesivos que siguen al préstamo, conviniendo que los intereses se calcularán al 5%. Calcula la anualidad a pagar cada año.

2. a) Descompón en factores primos el $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ y resuelve la inecuación $x^3 + 4x^2 + x - 6 > 0$.

b) Resuelve geométricamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales: $\left.\begin{aligned} 3x - 2y &\leqslant 6 \\ x + y &\geqslant 2 \end{aligned}\right\}$

3. a) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x + 2y - z = -9 \\ 3x - 2y + z = -1 \\ x - 3y - 3z = -17 \end{cases}$

b) Resuelve las siguientes ecuaciónes: $\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3 - x} = 0$

c) $\dfrac{x^2 - 1}{3} + (x - 2)^2 = \dfrac{x^2 + 2}{2}$

4. De una función empírica conocemos la siguiente tabla de valores.

x	1	4	5
f(x)	1	19	33

a) Calcula, por interpolación lineal, el valor que tomará dicha función para $x = 3$.

b) Calcula, utilizando la interpolación cuadrática, el valor de dicha función para $x = 6$.

5. a) El número de bacterias de un cultivo, en función del tiempo, viene dado por la expresión $f(t) = t^2 + 380t + 500$, en donde t viene expresado en minutos. Calcula:

La T.V.M., o velocidad media de crecimiento, en el perÌodo [3, 5].

La T.V.I., o velocidad instantánea de crecimiento, en el instante $t = 10$.

La función velocidad de crecimiento de dicho cultivo en función del tiempo.

b) Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones.

i) $f(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot (e^x + 1)$ ii) $g(x) = (x^3 + x)^5$ iii) $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x + 1)}{x^2}$ iv) $i(x) = \ln\left(x - \sqrt{x}\right)$

6. Un monedero M_1 contiene 2 monedas de euro y 3 de 50 céntimos, y otro M_2 contiene 3 de euro y 5 de 50 céntimos.

Si se elige al azar un monedero y, sin mirar, se extrae una moneda de él, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda extraída sea de euro?

Sabiendo que la moneda extraída es de euro, calcula la probabilidad de que provenga del monedero M_1.

7. Un agente de seguros de vida vende pólizas a cinco personas de la misma edad y que disfrutan de buena salud. La probabilidad de que una persona en estas condiciones viva 30 años o más es de $\dfrac{2}{3}$. Determina la probabilidad de que, transcurridos 30 años, vivan:

a) Las cinco personas. b) Al menos tres personas.

8. Las notas puestas por un profesor de matemáticas a lo largo de su vida profesional se distribuyen según una normal $N(5{,}8;\ 1{,}6)$. Durante el presente curso, dicho profesor tiene 160 alumnos.

a) ¿Cuántos de ellos se espera que aprueben? (nota $\geqslant$ 5).

b) ¿Cuántos se espera que tendrán sobresaliente? (nota $\geqslant$ 8,5).

c) ¿Cuántos tendrán bien o notable? ($6 \leqslant$ nota $\leqslant 8{,}5$).

MATERIAL FOTOCOPIABLE

Soluciones

1. a) $C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \Rightarrow 5000(1{,}075)^t > 20000 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}075)^t > 4 \Rightarrow t \cdot \log(1{,}075) > \log 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow t > \dfrac{\log(4)}{\log(1{,}075)} = 19{,}17$

Deben pasar 20 años para que el capital final supere los 20000 €.

b) $a = C \cdot \dfrac{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \cdot \left(\frac{r}{100}\right)}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1} = 10000 \cdot \dfrac{(1{,}05)^3 \cdot (0{,}05)}{(1{,}05)^3 - 1} =$

$= \dfrac{578{,}8125}{0{,}157625} = 3672{,}09$

2. a) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x + 3)(x + 2)(x - 1)$

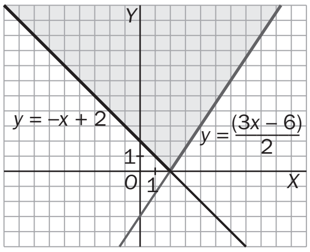
Para resolver la inecuación, construimos la tabla de signos:

	$-\infty \quad -3$	$-3 \quad -2$	$-2 \quad 1$	$1 \quad +\infty$
$x + 3$	−	+	+	+
$x - 2$	−	−	+	+
$x - 1$	−	−	−	+
$P(x)$	−	+	−	+

Solución: $(-3, -2) \cup (1, +\infty)$

b) $\begin{cases} 3x - 2y \leqslant 6 \\ x + y \geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geqslant \dfrac{3x - 6}{2} \\ y \geqslant -x \end{cases}$

Representando las dos rectas asociadas y teniendo en cuenta el sentido de las desigualdades se obtiene la región solución sombreada en gris oscuro en la figura.



3. a) $\begin{cases} 2x + 2y - z = -9 \\ 3x - 2y + z = -1 \\ x - 3y - 3z = -17 \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3} \begin{cases} x - 3y - 3z = -17 \\ 3x - 2y + z = -1 \\ 2x + 2y - z = -9 \end{cases} \Rightarrow$

$\xRightarrow[E_3 - 2E_1]{E_2 - 3E_1} \begin{cases} x - 3y - 3z = -17 \\ 7y + 10z = 50 \\ 8x + 5z = 25 \end{cases} \xRightarrow{7E_3 - 8E_2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 3y - 3z = -17 \\ 7y + 10z = 50 \\ -45z = -225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 5 \end{cases}$

b) $\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3 - x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{3 - x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 3 = 3 - x \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

c) $\dfrac{x^2 - 1}{3} + (x - 2)^2 = \dfrac{x^2 + 2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x^2 - 1) + 6(x - 2)^2 = 3(x^2 + 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2 - 24x + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

4. a) Calculamos la ecuación de la recta, $y = m \cdot x + n$, que pasa por los puntos (1, 1) y (4, 19).

$\begin{cases} 1 = m + n \\ 19 = 4m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = -5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 6x - 5;\ y(3) = 6 \cdot 3 - 5 = 13$

b) Calculamos la parábola, $f(x) = ax^2 + bx + c$, que pasa por los puntos (1, 1), (4, 19) y (5, 33).

$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 19 \\ 25a + 5b + c = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x + 3;\ f(6) = 51$

5. a) i) $\text{T.V.M.}[3, 5] = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{2425 - 1649}{2} =$
$= 388$ bacterias/m.

ii) $\text{T.V.I.}(10) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(10 + h) - f(10)}{h} = \dfrac{h^2 + 400h}{h} =$
$= 400$ bac/m.

iii) $v(t) = f'(t) = 2t + 380$

b) i) $f'(x) = (2x - 2)(e^x + 1) + (x^2 - 2x + 3)e^x$

ii) $g'(x) = 5(x^3 + x)^4(3x^2 + 1)$

iii) $h'(x) = \dfrac{2x\cos(2x + 1) - 2\,\text{sen}(2x + 1)}{x^3}$

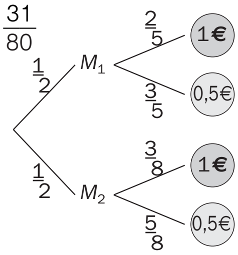
iv) $i'(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{2x\left(\sqrt{x} - 1\right)}$

6. $P(1\ €) = P(M_1)P(1\ €/M_1) + P(M_2)P(1\ €/M_2) =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{6} = \dfrac{31}{80}$

$P(M_1/1\ €) = \dfrac{P(M_1)P(1\ €/M_1)}{P(1\ €)} =$

$= \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{31}{80}} = \dfrac{16}{31}$



7. Se trata de una binomial $B\left(5, \dfrac{2}{3}\right)$.

a) $P(X = 5) = \dbinom{5}{5} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 = 0{,}132$

b) $P(X \geqslant 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$

$= \dbinom{5}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \dbinom{5}{4} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^1 + 0{,}132 =$

$= 10 \cdot \dfrac{8}{27} \cdot \dfrac{1}{9} + 5 \cdot \dfrac{16}{81} \cdot \dfrac{1}{3} + 0{,}132 = 0{,}79$

8. Al ser una normal $N(5{,}8;\ 1{,}6)$:

a) $P(5 < X) = P\left(\dfrac{5 - 5{,}8}{1{,}6} < Z\right) = P(-0{,}5 < Z) =$

$= P(Z < 0{,}5) = 0{,}69;\ \dfrac{69}{100} \cdot 160 = 110$ alumnos

b) $P(8{,}5 < X) = P\left(\dfrac{8{,}5 - 5{,}8}{1{,}6} < Z\right) = P(1{,}69 < Z) =$

$= 1 - P(Z < 1{,}69) = 0{,}46;\ \dfrac{46}{100} \cdot 160 = 7$ alumnos

c) $P(6 < X < 8{,}5) = P(0{,}125 < Z < 1{,}69) =$
$= P(Z < 1{,}69) - P(Z < 0{,}125) = 0{,}954 - 0{,}550 =$
$= 0{,}404;\ \dfrac{40{,}4}{100} \cdot 160 = 65$ alumnos

Notas:

Notas:

Notas:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Notas:

PROYECTO EDITORIAL
Equipo de Educación Secundaria de Ediciones SM

AUTOR
Sotero Calvo

EDICIÓN
Rafaela Arévalo
Elsa Santaolalla
Juan Alberto Torresano

ILUSTRACIÓN
Félix Anaya
Juan Francisco Cobos
Jurado y Rivas

DISEÑO
Maritxu Eizaguirre
Alfonso Ruano

MAQUETACIÓN
Grafilia, SL

COORDINACIÓN EDITORIAL
Josefina Arévalo

DIRECCIÓN EDITORIAL
Aída Moya
