Ejercicio 1.

Escribe en forma de intervalo y representa en la recta real los siguientes conjuntos de números:

$a)\ |x+2|<4$ $\qquad b)\ |2x-1|\geq 5$

Solución:

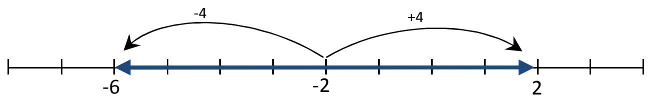
$a)\quad |x+2|<4 \quad\Rightarrow\quad |x-(-2)|<4 \quad\Rightarrow\quad la\ distancia\ entre\ "x"\ y\ (-2)\ tiene\ que\ ser\ menor\ que\ 4$

$d(x,-2)<4 \quad\Rightarrow\quad desde\ (-2)\ nos\ movemos\ 4\ unidades\ a\ la\ derecha\ y\ a\ la\ izquierda:$

$-2-4<x<-2+4 \quad\Rightarrow\quad -6<x<2 \quad\Rightarrow\quad x\in(-6\,,2)$

$También\ podemos\ verlo\ así:\ |x+2|<4 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x+2<4 \\ x+2>-4 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x<2 \\ x>-6 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x\in(-6\,,2)$

Gráficamente:

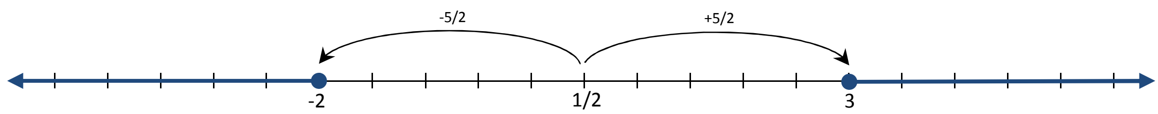


$b)\quad |2x-1|\geq 5 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2x-1\geq 5 \\ 2x-1\leq -5 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2x\geq 6 \\ 2x\leq -4 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x\geq 3 \\ x\leq -2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x\in(-\infty\,,-2]\cup[3\,,+\infty)$

$También:\ |2x-1|\geq 5 \quad\Rightarrow\quad \frac{|2x-1|}{2}\geq\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad \left|x-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad d\left(x,\frac{1}{2}\right)\geq\frac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad x\geq\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\ \ y\ \ x\leq\frac{1}{2}-\frac{5}{2}$

$\Rightarrow\quad x\in(-\infty\,,-2]\cup[3\,,+\infty)$

Gráficamente:



Ejercicio 2.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$a)\ (4x^3+4x^2-11x-6)\cdot(x^3+5x-6)=0$ $\qquad b)\ \sqrt{7+2x}-\sqrt{3+x}=1$

Solución:

$a)\ (4x^3+4x^2-11x-6)\cdot(x^3+5x-6)=0$ *como la única opción de que el producto de dos números sea cero es que lo sea alguno de ellos, tenemos:*

$(4x^3+4x^2-11x-6)\cdot(x^3+5x-6)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} (4x^3+4x^2-11x-6)=0 \\ (x^3+5x-6)=0 \end{cases} \quad\Rightarrow$

Para resolver la ecuación $4x^3+4x^2-11x-6=0$, *descomponemos el polinomio usando la regla de Ruffini.*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 4 & -11 & -6 \\ -2 & & -8 & 8 & 6 \\ \hline & 4 & -4 & -3 & \lfloor 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad 4x^3+4x^2-11x-6=(x+2)\cdot(4x^2-4x-3) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4x^3+4x^2-11x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x+2=0 \quad o \quad 4x^2-4x-3=0$$

$$\begin{cases} x+2=0 \;\Rightarrow\; x=-2 \\ 4x^2-4x-3=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot4\cdot(-3)}}{2\cdot4}=\dfrac{4\pm8}{8}=\left\langle \begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

Con la otra ecuación hacemos lo mismo, $x^3+5x-6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 5 & -6 \\ 1 & & 1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & \lfloor 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x^3+5x-6=(x-1)\cdot(x^2+x+6) \quad \Rightarrow \quad (x-1)\cdot(x^2+x+6)=0$$

$$x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1$$

$$x^2+x+6=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{2} \text{ no tiene solución real}$$

Soluciones de la ecuación: $\left\{x=-2 \;,\; x=\dfrac{3}{2} \;,\; x=-\dfrac{1}{2} \;,\; x=1\right\}$

$b)$ $\sqrt{7+2x}-\sqrt{3+x}=1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{7+2x}=1+\sqrt{3+x} \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{7+2x}\right)^2=\left(1+\sqrt{3+x}\right)^2 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 7+2x=1+3+x+2\cdot\sqrt{3+x} \quad \Rightarrow \quad x+3=2\cdot\sqrt{3+x} \quad \Rightarrow \quad (x+3)^2=\left(2\cdot\sqrt{3+x}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2+6x+9=4(3+x) \quad \Rightarrow \quad x^2+2x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-3)}}{2}=\frac{-2\pm4}{2}=\left\langle \begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Comprobamos las soluciones y vemos que ambas son válidas.

$$\sqrt{7+2\cdot1}-\sqrt{3+1}=3-2=1 \quad ; \quad \sqrt{7+2\cdot(-3)}-\sqrt{3+(-3)}=1$$

Ejercicio 3.

Calcula el valor de las siguientes expresiones, sin utilizar la calculadora:

$a)$ $\log_4\left(3\sqrt[3]{128}+5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{54}-5\sqrt[3]{16}\right)$ $\qquad$ $b)$ $\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}}\right)$

Solución:

$a)$ $\log_4\left(3\sqrt[3]{128}+5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{54}-5\sqrt[3]{16}\right)=\log_4\left(3\sqrt[3]{2^7}+5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3^3\cdot2}-5\sqrt[3]{2^4}\right)=\log_4\left(12\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}\right)=$

$$=\log_4\left(16\sqrt[3]{2}\right)=\log_4 16+\log_4\sqrt[3]{2}=\log_4 4^2+\log_4 2^{1/3}=\log_4 4^2+\log_4\left(4^{1/2}\right)^{1/3}=\log_4 4^2+\log_4 4^{1/6}=2+\frac{1}{6}=\frac{13}{6}$$

$b)$ $\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}}\right)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{3^{1/2}}{3^{2/3}}\right)=\log_{\frac{1}{3}}(3)^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}=\log_{\frac{1}{3}}3^{-1/6}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1/6}=\dfrac{1}{6}$

Ejercicio 4.

Recibimos un préstamo de 21 000 € al 8% anual que amortizamos pagando, cada trimestre, una cuota de 2866,71 €. ¿Cuánto tiempo tardaremos en saldar la deuda?

Solución:

Los $21.000€$ *que nos han prestado, los amortizaremos en "n" trimestres a un 8% de interés anual.*

Cuando pasen los "n" trimestres tendremos que devolver $21000\cdot\left(1+\dfrac{8}{400}\right)^n=21000\cdot(1,02)^n$

Por otro lado, las cuotas trimestrales de $2866,71€$ *acumularán un valor:*

$$2866,71\cdot(1,02)^{n-1}+2866,71\cdot(1,02)^{n-2}+\cdots\cdots+12866,71\cdot(1,02)+2866,71=2866,71\cdot\left[\frac{(1,02)^n-1}{(1,02)-1}\right]$$

Con lo que tenemos que: $21000\cdot(1,02)^n=2866,71\cdot\left[\dfrac{(1,02)^n-1}{0,02}\right]\quad\Rightarrow\quad 21000\cdot(1,02)^n=\dfrac{2866,71}{0,02}\cdot\left[(1,02)^n-1\right]\quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad 21000\cdot(1,02)^n=143335,5\cdot\left[(1,02)^n-1\right]\quad\Rightarrow\quad 21000\cdot(1,02)^n=143335,5\cdot(1,02)^n-143335,5\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 143335,5=143335,5\cdot(1,02)^n-21000\cdot(1,02)^n\quad\Rightarrow\quad 143335,5=122335,5\cdot(1,02)^n\quad\Rightarrow\quad (1,02)^n=\frac{143335,5}{122335,5}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad (1,02)^n=1,1716591\quad\Rightarrow\quad \log(1,02)^n=\log(1,1716591)\quad\Rightarrow\quad n=\frac{\log(1,1716591)}{\log(1,02)}=7,999988\simeq 8$$

Son necesarios 8 trimestres para amortizar el préstamo, es decir, 2 años.

Ejercicio 5.

¿Qué valor ha de tener m para que el polinomio $p(x)=2x^4+x^3+mx^2-x+6$ sea divisible por $(x+1)$?

Para ese valor de m, calcula el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)=2x^3-7x^2+8x-3$

Solución:

Si $p(x)=2x^4+x^3+mx^2-x+6$ *es divisible por* $(x+1)$ *quiere decir que* $p(-1)=0$.

$p(-1)=2\cdot(-1)^4+(-1)^3+m\cdot(-1)^2-(-1)+6=2-1+m+1+6\quad\Rightarrow\quad m+8=0\quad\Rightarrow\quad m=-8$

Ahora factorizamos los polinomios $p(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6$ *y* $q(x)=2x^3-7x^2+8x-3$.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\
-1 & & -2 & 1 & 7 & -6 \\ \hline
 & 2 & -1 & -7 & 6 & \lfloor 0 \\
1 & & 2 & 1 & -6 & \\ \hline
 & 2 & 1 & -6 & \lfloor 0 & \\
-2 & & -4 & 6 & & \\ \hline
 & 2 & -3 & \lfloor 0 & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -7 & 8 & -3 \\
1 & & 2 & -5 & 3 \\ \hline
 & 2 & -5 & 3 & \lfloor 0 \\
1 & & 2 & -3 & \\ \hline
 & 2 & -3 & \lfloor 0 &
\end{array}$$

$$q(x)=2x^3-7x^2+8x-3=(x-1)^2\cdot(2x-3)$$

$p(x)=2x^4+x^3-8x^2-x+6=(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(2x-3)\quad\Rightarrow\quad M.C.D.\left(p(x),q(x)\right)=(x-1)\cdot(2x-3)$

Ejercicio 6.

Opera y simplifica el resultado:

$$\left(\frac{x-2}{x^2-4x+3}-\frac{x-1}{x^2-5x+6}+\frac{x-3}{x^2-3x+2}\right):\frac{3x-18}{x^2-1}$$

Solución:

Factorizamos los denominadores: $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$; *tenemos como común denominador*: $(x-1)(x-2)(x-3)$

$$\left(\frac{x-2}{x^2-4x+3}-\frac{x-1}{x^2-5x+6}+\frac{x-3}{x^2-3x+2}\right):\frac{3x-18}{x^2-1}=\left(\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}-\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}+\frac{(x-3)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}\right):\frac{3x-18}{x^2-1}=$$

$$=\left(\frac{(x-2)^2-(x-1)^2+(x-3)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}\right):\frac{3x-18}{x^2-1}=\left(\frac{x^2-4x+4-(x^2-2x+1)+x^2-6x+9}{(x-1)(x-2)(x-3)}\right):\frac{3x-18}{x^2-1}==\left(\frac{x^2-8x+12}{(x-1)(x-2)(x-3)}\right):\frac{3x-18}{x^2-1}=$$

$$=\frac{(x^2-8x+12)(x^2-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)(3x-18)}=\frac{\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x-6)}\,(x+1)\,\cancel{(x-1)}}{3\cancel{(x-1)}\,\cancel{(x-2)}\,(x-3)\,\cancel{(x-6)}}=\frac{x+1}{3(x-3)}=\frac{x+1}{3x-9}$$

Ejercicio 7.

Lidia duda entre pedir un préstamo hipotecario al Banco Bank, a un interés del 4% y amortizable en 15 años, o a la Caja Cash, a un interés del 5% y amortizable en 10 años. ¿Dónde pagará menor cuota mensual? ¿Dónde tendrá que devolver menos dinero? Usa para las comparaciones la cantidad de 100.000 euros.

Solución:

Si el capital prestado hubiese que devolverlo en un único pago, al final de los años estipulados y con periodos de capitalización mensuales, se habría convertido, en el caso del Banco Bank, $BB=100000\cdot\left(1+\frac{4}{1200}\right)^{180}=182.030,16$ €

Para el supuesto de la Caja Cash, tendríamos $CC=100000\cdot\left(1+\frac{5}{1200}\right)^{120}=164.700,95$ €

Llamamos c_1 *a la cuota mensual válida para amortizar el préstamo del Banco Bank y* c_2 *a la cuota de la Caja Cash. Tenemos que, para el caso de* c_1*, la primera cuota estará produciendo intereses durante* 179 *meses, la segunda* 178 *y así sucesivamente, con lo que las cuotas pagadas hasta el vencimiento acumulan el valor*:

$$c_1+c_1\cdot\left(1+\frac{4}{1200}\right)+c_1\cdot\left(1+\frac{4}{1200}\right)^2+\cdots\cdots+c_1\cdot\left(1+\frac{4}{1200}\right)^{178}+c_1\cdot\left(1+\frac{4}{1200}\right)^{179}=c_1\cdot\frac{\left(1+\frac{4}{1200}\right)^{180}-1}{\left(1+\frac{4}{1200}\right)-1}\simeq c_1\cdot 246,09$$

Ese valor acumulado, de algo más de 246 cuotas $(246,09\cdot c_1)$*, debe ser igual a la cantidad BB que tendría que recibir el banco.*
$246,09\cdot c_1=182030,16 \quad\Rightarrow\quad c_1=739,69$, *la cuota mensual para el caso del Banco Bank será de 739,69 €.*

En el caso de c_2, *la primera cuota estará produciendo intereses durante* 119 *meses*, *la segunda* 118 *y así sucesivamente*, *con lo que las cuotas pagadas hasta el vencimiento acumulan el valor*:

$$c_2 + c_2 \cdot \left(1+\frac{5}{1200}\right) + c_2 \cdot \left(1+\frac{5}{1200}\right)^2 + \cdots\cdots + c_2 \cdot \left(1+\frac{5}{1200}\right)^{118} + c_2 \cdot \left(1+\frac{5}{1200}\right)^{119} = c_2 \cdot \frac{\left(1+\frac{5}{1200}\right)^{120} - 1}{\left(1+\frac{5}{1200}\right) - 1} \simeq c_2 \cdot 155,28$$

Ese valor acumulado, de algo más de 155 *cuotas* $(155,28 \cdot c_2)$, *debe ser igual a la cantidad CC que tendría que recibir la Caja.*
$155,28 \cdot c_2 = 164700,95 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1060,67$, *la cuota mensual para el caso de la Caja Cash será de* 1.060,67 €.

Entonces tenemos que $c_1 = 739,69$ € *y* $c_2 = 1.060,67$ €, *con lo que el préstamo del Banco Bank tiene una cuota mensual inferior. Sin embargo, en las cantidades que devolveremos ocurre que para el Banco Bank pagaremos* 180 *cuotas* $\Rightarrow$
$\Rightarrow \; 180 \cdot 739,69 = 133.144,20$ € *y para la Caja Cash serán* 120 *cuotas* $\Rightarrow$ $120 \cdot 1060,67 = 127.280,40$ €

En el Banco Bank pagaremos, al final, casi 6.000 € *más que en la Caja Cash, eso si, en cuotas bastante más cómodas.*

Ejercicio 8.

Reduce las expresiones:

$a)\ \left(\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}}}\right) \cdot \sqrt[4]{2}$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4 \cdot \left(a^2 \cdot \sqrt{a}\right)^3}{\sqrt[6]{a^5}}$

Solución:

$$a)\ \left(\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}}}\right) \cdot \sqrt[4]{2} = \left(2^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4} \cdot 4^{1/12}\right) \cdot 2^{1/4} = 2^{1/2} \cdot 2^{-1/4} \cdot 2^{2/12} \cdot 2^{1/4} = 2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)} = 2^{4/6} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$$

$$b)\ \frac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4 \cdot \left(a^2 \cdot \sqrt{a}\right)^3}{\sqrt[6]{a^5}} = \frac{\left(a^{2/3}\right)^4 \cdot \left(a^2 \cdot a^{1/2}\right)^3}{a^{5/6}} = \frac{a^{8/3} \cdot a^6 \cdot a^{3/2}}{a^{5/6}} = a^{\left(\frac{8}{3}+6+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}\right)} = a^{56/6} = a^{28/3} = a^9 \cdot \sqrt[3]{a}$$